Параметры. Рациональные уравнения и неравенства

Напомним, что *рациональной функцией* называется отношение двух многочленов. Уравнение или неравенство называется *рациональным*, если в нём рациональная функция сравнивается с нулём (или с другой рациональной функцией).

При решении рациональных уравнений нужно считаться с тем, что знаменатели дробей могут обращаться в нуль. Рациональные неравенства решаются методом интервалов.

Задача 1. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\frac{x-a}{x^2-3x+2}=0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-a=0, \\ x^2-3x+2\neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=a, \\ x\neq 1,2. \end{cases}$$

Ответ: Если $a\neq 1,2$, то $x=a$; если $a=1$ или $a=2$, то решений нет.

Задача 2. При каких a уравнение

$$\frac{x^2+ax+1}{x-2}=0$$

имеет единственный корень?

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+ax+1=0, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Данная система будет иметь единственное решение в одном из двух случаев:

1) уравнение системы имеет единственный корень, не равный 2;
2) уравнение системы имеет два корня, один из которых равен 2.

Первый случай отвечает нулевому дискриминанту: $D=a^2-4=0$, то есть $a=\pm 2$. Если $a=2$, то уравнение системы имеет корень $x=-1$; аналогично, если $a=-2$, то $x=1$. В обоих случаях имеем $x\neq 2$, так что значения $a=\pm 2$ подходят.

Во втором случае давайте просто подставим $x=2$ в уравнение системы: $4+2a+1=0$, откуда $a=-\frac{5}{2}$. Тем самым мы нашли (единственное) значение a, при котором уравнение системы имеет корень $x=2$. При данном a уравнение системы принимает вид $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$, и второй его корень $x=\frac{1}{2}$. Это значение x и будет единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $a=\pm 2, -\frac{5}{2}$.

Задача 3. (*МГУ, химический ф-т, 2003*) Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x-a}>0$$

содержит точку $x=1$.

Решение. Если $a=0$, то данное неравенство принимает вид $\frac{0}{x}>0$ и решений не имеет.

Если $a > 0$, то множество решений неравенства есть $x > a$. Это множество содержит точку $x = 1$ при $a < 1$. Итак, в данном случае имеем подходящие a: $0 < a < 1$.

Если $a < 0$, то множество решений неравенства есть $x < a$. Это множество состоит из отрицательных чисел и не может содержать точку $x = 1$. Поэтому никакое $a < 0$ не годится.

Ответ: $a \in (0; 1)$.

Задача 4. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение. Методом интервалов легко устанавливаем, что решения данного неравенства расположены между точками a и $2a + 1$. Точнее, имеем три случая — в зависимости от того, какое из чисел (a или $2a + 1$) больше.

1. При $a < -1$ имеем $2a+1 < a$, так что множество решений неравенства есть $2a+1 < x < a$. Это множество состоит только из отрицательных чисел и потому не может содержать отрезок $[1; 2]$. Следовательно, в рассматриваемом случае подходящих значений a нет.

2. Если $a = -1$, то неравенство не имеет решений. Это значение a не годится.

3. При $a > -1$ имеем $a < 2a+1$, так что множество решений неравенства есть $a < x < 2a+1$. Отрезок $[1; 2]$ будет содержаться в этом множестве при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} a < 1, \\ 2 < 2a + 1, \end{cases}$$

то есть при $\frac{1}{2} < a < 1$. Все эти a удовлетворяют неравенству $a > -1$ и, следовательно, подходят.

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

В следующем листке «Параметр как переменная» мы рассмотрим другой способ решения этой задачи, в котором параметр a играет роль отдельной переменной.

Задачи

1. При всех a решить уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - a} = 0.$$

Если $a \neq 1, 3$, то $x = 1$ и $x = 3$; если $a = 1$, то $x = 3$; если $a = 3$, то $x = 1$

2. При всех a решить уравнение

$$\frac{a(x - a)}{x - 2} = 0.$$

Если $a \neq 0, 2$, то $x = a$; если $a = 0$, то $x \neq 2$; если $a = 2$, то решений нет

3. При всех a решить уравнение

$$\frac{a(x - 2)}{x - a} = 0.$$

Если $a \neq 0, 2$, то $x = 2$; если $a = 0$, то $x \neq 0$; если $a = 2$, то решений нет

4. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{4x-a}{x-2a} < 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $2 \leqslant x \leqslant 4$.

$\boxed{a \in (2;8)}$

5. Найти все a, при которых неравенство

$$\frac{x+3a-5}{x+a} \geqslant 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $1 \leqslant x \leqslant 4$.

$\boxed{a \in (-\infty;-4) \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right)}$

6. (*МГУ, социологич. ф-т, 2005*) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{(a+4)x^2+6x-1}{x+3} = 0$$

имеет единственное решение?

$\boxed{a \in \left\{-13, -4, -\frac{17}{9}\right\}}$

7. (*МГУ, химический ф-т, 2003*) Найдите все значения параметра b, при которых множество решений неравенства

$$\frac{b}{x+b} < 0$$

содержит точку $x = 2$.

$\boxed{b \in (-2;0)}$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2006*) При всех значениях a решите уравнение

$$3^{\frac{ax+2}{x^2+2}} + 3^{\frac{3x^2-ax+4}{x^2+2}} = 12.$$

$\boxed{\text{Если } a \in (-\infty;-4] \cup [4;+\infty), \text{ то } x = 0, a, \frac{a \pm \sqrt{a^2-16}}{4}\text{; если } a \in (-4;4), \text{ то } x = 0, a}$

9. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2002*) Найдите все a, при которых уравнение

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x)-\lg(x-a)} = 0$$

имеет единственный корень.

$\boxed{a \in \left(\frac{1}{15};\frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8};\frac{4}{15}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1;4)}$

10. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2003*) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства

$$\frac{x-3b}{b-2x} < 0.$$

$b \in (-\infty; -6) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

11. (*МГУ, мехмат, 1999-05.5*) Найти все a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \geqslant \frac{5a+5}{2(2^x+3a+3)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

$a \in (-\infty; -3) \cup \{-1\} \cup [3; +\infty)$

12. (*МГУ, мехмат, 1999-07.5*) Найти все a, при которых сумма длин интервалов, составляющих множество решений неравенства

$$\frac{x^2+(2a^2+6)\,x-a^2+2a-3}{x^2+(a^2+7a-7)\,x-a^2+2a-3} < 0$$

не меньше 1.

$a \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$

13. (*МГУ, физический ф-т, 2003*) Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2 \cdot 2^{|2a-1|}-2x+1}{x^2-(a-2)x-2a} > 0.$$

Если $a \leqslant -2$, то $x \in (-\infty; a) \cup (-2; +\infty)$; если $a \in \left(-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (a; +\infty)$;

если $a = \frac{1}{2}$, то $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

14. (*МГУ, химический ф-т, 1999*) При каждом $a \in [-1; 0]$ решить неравенство

$$\log_{x+a}\left(x^2-(a+1)x+a\right) \geqslant 1.$$

Если $a = -1$, то $x > 2$; если $a \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, то $x \in (1; a+2] \cup (1-a; +\infty)$; если $a = -\frac{1}{2}$, то $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$;

если $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, то $x \in (1; 1-a) \cup [a+2; +\infty)$; если $a = 0$, то $x \geqslant 2$