

Параметры и квадратный трёхчлен. 1

Мы начинаем с рассмотрения уравнений вида

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Если $a \neq 0$, то уравнение (1) является *квадратным*. Не забываем, однако, что параметр a «никому ничем не обязан» и может равняться нулю (и тогда уравнение перестаёт быть квадратным). Случай $a = 0$ при необходимости следует рассматривать отдельно.

Напомним известные вам факты теории. Пусть уравнение (1) является квадратным, то есть $a \neq 0$. Тогда *дискриминант* этого уравнения есть величина $D = b^2 - 4ac$. Возможны три случая.

1. Если $D > 0$, то уравнение (1) имеет ровно два различных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2. Если $D = 0$, то уравнение (1) имеет единственный корень

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3. Если $D < 0$, то уравнение (1) не имеет корней.

Для квадратного уравнения вида

$$ax^2 + 2kx + b = 0$$

удобно использовать дискриминант

$$D_1 = \frac{D}{4} = k^2 - ac.$$

Тогда формула корней выглядит так:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Если уравнение (1) имеет два различных корня x_1 и x_2 , то его левая часть раскладывается на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если уравнение (1) имеет единственный корень x_0 , то его левая часть является полным квадратом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

ТЕОРЕМА ВИЕТА. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 , то справедливы формулы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Эти же формулы имеют место и в случае единственного корня x_1 , если положить $x_2 = x_1$.

Задача 1. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Определите, сколько существует различных значений a , при которых уравнение

$$(1 - a^2)x^2 + ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Эта простая задача отборочного тура содержит маленький подвох: надо не забыть рассмотреть отдельно значения $a = \pm 1$, при которых уравнение окажется не квадратным, а линейным. Так, при $a = 1$ уравнение принимает вид $x + 1 = 0$ и имеет единственный корень $x = -1$; аналогично, при $a = -1$ уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Если же $a \neq \pm 1$, то наше уравнение — квадратное с дискриминантом

$$D = a^2 - 4(1 - a^2) = 5a^2 - 4.$$

Корень будет единственным в том и только в том случае, если $D = 0$, то есть при $a = \pm 2/\sqrt{5}$. Всего, стало быть, получается четыре значения a .

Ответ: Четыре.

Задача 2. При всех a решить уравнение $x^2 + ax + 9 = 0$.

Решение. Находим дискриминант:

$$D = a^2 - 36 = (a - 6)(a + 6).$$

Методом интервалов определяем знаки дискриминанта:



Соответственно, рассматриваем следующие случаи. Если $a < -6$ или $a > 6$, то уравнение имеет два корня:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}. \quad (2)$$

Если $a = -6$, то корень один, и он легко получается из формулы (2): $x = 3$. Аналогично, если $a = 6$, то $x = -3$. Наконец, если $-6 < a < 6$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}$; если $a = -6$, то $x = 3$; если $a = 6$, то $x = -3$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

Можно дать ответ в более сжатом виде, если «пристыковать» случаи $a = \pm 6$ к первому случаю.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$, то $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 36}}{2}$; если $a \in (-6; 6)$, то решений нет.

В каком именно виде записывать ответ — дело вашего вкуса. Мы обычно будем предпочитать второй вариант.

Задача 3. При всех a решить уравнение $ax^2 + x + 1 = 0$.

Решение. Здесь тоже хочется сразу написать дискриминант, но давайте всё же заметим, что возможно $a = 0$, и тогда уравнение не будет квадратным (так что ни о каком дискриминанте говорить не придётся). Этот случай надо рассмотреть отдельно.

Пусть $a = 0$. Тогда уравнение примет вид $x + 1 = 0$, откуда $x = -1$.

Пусть теперь $a \neq 0$. Тогда уравнение является квадратным, и его дискриминант $D = 1 - 4a$. При $a \leq \frac{1}{4}$ дискриминант неотрицателен, поэтому

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}.$$

Если же $a > \frac{1}{4}$, то $D < 0$ и уравнение не имеет корней.

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{1}{4}]$, то $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}$; если $a = 0$, то $x = -1$; если $a \in (\frac{1}{4}; +\infty)$, то решений нет.

Задача 4. Найдите все значения a , при каждом из которых один из корней уравнения

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$$

в два раза больше другого.

Решение. Прежде всего, уравнение должно иметь два различных корня, поэтому его дискриминант положителен:

$$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + 2) = 4a - 7 > 0,$$

откуда

$$a > \frac{7}{4}. \quad (3)$$

Пусть корни нашего уравнения равны t и $2t$. По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} t + 2t = 2a + 1, \\ t \cdot 2t = a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 2a + 1, \\ 2t^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Выразим t из первого уравнения, подставим во второе и после простых преобразований получим:

$$a^2 - 8a + 16 = 0 \Leftrightarrow (a - 4)^2 = 0,$$

то есть $a = 4$. Это значение a удовлетворяет неравенству (3) и потому годится.

Ответ: $a = 4$.

Задача 5. При каких значениях a сумма квадратов двух различных корней уравнения

$$x^2 - 4ax + 5a = 0$$

равна 6?

Решение. Уравнение имеет два различных корня, поэтому дискриминант положителен:

$$D_1 = (2a)^2 - 5a = a(4a - 5) > 0,$$

откуда

$$a < 0 \quad \text{или} \quad a > \frac{5}{4}. \quad (4)$$

Пусть корни равны x_1 и x_2 . Имеем:

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (4a)^2 - 2 \cdot 5a = 16a^2 - 10a.$$

Получаем квадратное уравнение

$$8a^2 - 5a - 3 = 0,$$

корни которого $a_1 = 1$ и $a_2 = -\frac{3}{8}$. Значение a_1 не годится, так как не удовлетворяет условию (4). Значение a_2 удовлетворяет этому условию и поэтому подходит.

Ответ: $a = -\frac{3}{8}$.

Задача 6. («Физтех», 2014, 9–11) При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2ax + 2a - 5 = 0$?

Решение. Заметим, что дискриминант

$$D/4 = a^2 - 2a + 5 = (a - 1)^2 + 4$$

положителен при всех значениях a . Значит, при любом a наше уравнение имеет два различных корня x_1 и x_2 . Как и выше, получаем:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a)^2 - 2(2a - 5) = 4a^2 - 4a + 10 = (2a - 1)^2 + 9.$$

Полученное выражение не меньше 9; оно равно 9 только при $a = 1/2$.

Ответ: $a = 1/2$.

Задача 7. При каких значениях a уравнение $(a - 3)x^2 - 2ax + 5a = 0$ имеет только положительные корни?

Решение. При $a = 3$ получаем уравнение $-6a + 15 = 0$, корень которого положителен. Поэтому значение $a = 3$ годится.

Пусть теперь $a \neq 3$. Уравнение является квадратным с дискриминантом

$$D_1 = a^2 - 5a(a - 3) = a(15 - 4a).$$

Условие существования корней:

$$a(15 - 4a) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{15}{4}. \quad (5)$$

Сами корни можно не искать — на помощь снова приходит теорема Виета. В самом деле, ясно, что необходимым и достаточным условием положительности корней x_1, x_2 квадратного уравнения служит система неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1x_2 > 0. \end{cases} \quad (6)$$

(Необходимость очевидна: если корни x_1, x_2 положительны, то оба неравенства (6) выполнены. Теперь покажем достаточность. Пусть оба неравенства (6) выполняются. В силу второго неравенства оба корня имеют одинаковый знак. Тогда в силу первого неравенства оба корня положительны.)

В нашем случае система (6) даёт:

$$\begin{cases} \frac{a}{a - 3} > 0, \\ \frac{5a}{a - 3} > 0, \end{cases}$$

откуда легко находим

$$a < 0 \quad \text{или} \quad a > 3. \quad (7)$$

Нам остаётся пересечь множества (7) и (5) и к полученному пересечению добавить найденное ранее значение $a = 3$.

Ответ: $[3; \frac{15}{4}]$.

Задача 8. При каких a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

Решение. Предположим, что x_0 — общий корень данных уравнений. Имеем систему:

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$(a - 1)(x_0 - 1) = 0.$$

Отсюда следует, что $a = 1$ или $x_0 = 1$. Надо рассмотреть оба этих случая.

Если $a = 1$, то оба уравнения совпадают: $x^2 + x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет корней, поэтому $a = 1$ не годится.

Если $x_0 = 1$, то из любого равенства системы получаем $a = -2$. При данном a исходные уравнения принимают вид:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ в самом деле является общим корнем данных уравнений.

Ответ: $a = -2$.

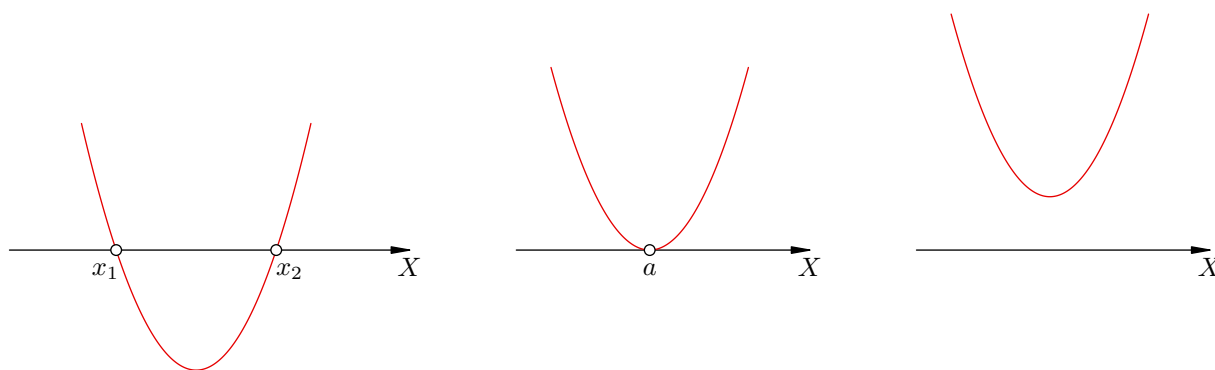
Переходим к рассмотрению квадратных неравенств с параметрами. Здесь мы затронем лишь начало данной темы; другие вопросы будут изложены в следующем листке.

Задача 9. При всех a решить неравенство $x^2 - 2ax + 4 > 0$.

Решение. Находим дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 2ax + 4$:

$$D_1 = a^2 - 4.$$

Возможны три варианта расположения параболы $y = x^2 - 2ax + 4$, изображённые на рисунке (слева направо идут случаи $D_1 > 0$, $D_1 = 0$ и $D_1 < 0$).



Пусть $D_1 > 0$, то есть $a < -2$ или $a > 2$. Тогда парабола пересекает ось X в двух точках:

$$x_1 = a - \sqrt{a^2 - 4}, \quad x_2 = a + \sqrt{a^2 - 4}.$$

Множество решений неравенства состоит из тех x , при которых $y > 0$ (ведь именно таков знак решаемого неравенства); то есть из тех x , при которых график проходит выше оси абсцисс:

$$x < a - \sqrt{a^2 - 4}, \quad x > a + \sqrt{a^2 - 4}.$$

Пусть теперь $D_1 = 0$, то есть $a = \pm 2$. Парабола касается оси X в точке $x = a$; множество решений нашего неравенства — все x за исключением точки a .

Наконец, пусть $D_1 < 0$, то есть $-2 < a < 2$. Тогда парабола лежит целиком выше оси X , и любой x служит решением нашего неравенства.

Ответ: Если $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, то $x \in (-\infty; a - \sqrt{a^2 - 4}) \cup (a + \sqrt{a^2 - 4}; +\infty)$; если $a \in (-2; 2)$, то x любое.

Задача 10. Найти все такие a , что решения неравенства $x^2 + (a - 5)x - 2a^2 + 2a + 4 \leq 0$ образуют отрезок, длина которого больше 6.

Решение. Находим дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + (a - 5)x - 2a^2 + 2a + 4$:

$$D = (a - 5)^2 - 4(-2a^2 + 2a + 4) = 9a^2 - 18a + 9 = 9(a - 1)^2.$$

Тогда корни этого трёхчлена:

$$x_{1,2} = \frac{-(a - 5) \pm 3(a - 1)}{2},$$

то есть

$$x_1 = \frac{-a + 5 + 3a - 3}{2} = a + 1, \quad x_2 = \frac{-a + 5 - 3a + 3}{2} = 4 - 2a.$$

В зависимости от того, какой из корней больше, множеством решений данного неравенства является либо отрезок $[a + 1; 4 - 2a]$, либо отрезок $[4 - 2a; a + 1]$ (либо точка в случае совпадения корней). Но нам нет нужды заниматься этим (пусть и несложным) исследованием. Ведь длина отрезка решений в любом случае равна:

$$|x_1 - x_2| = |(a + 1) - (4 - 2a)| = |3a - 3|.$$

В соответствии с условием получаем неравенство:

$$|3a - 3| > 6,$$

то есть

$$|a - 1| > 2,$$

откуда $a < -1$ или $a > 3$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Замечание. Задачу можно было решить и без явного нахождения корней — а именно, с помощью теоремы Виета. В самом деле, неравенство

$$|x_1 - x_2| > 6$$

эквивалентно неравенству

$$36 < (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2;$$

а как действовать дальше, вам уже известно.

Мы хотели бы отметить лишь, что если дискриминант оказывается полным квадратом, то для корней квадратного трёхчлена получаются выражения, не содержащие радикалов, и это обстоятельство часто упрощает решение задачи. Однако такой «подарок судьбы» попадает далеко не всегда. В следующей статье будут рассмотрены задачи, в которых использование явных выражений для корней приводит к техническим трудностям и решение отыскивается иными методами.

Задачи

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ не имеет корней.

$$\boxed{1 < a}$$

2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax^2 + 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня.

$$\boxed{(2; 0) \cap (0; \infty) \ni a}$$

3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

$$\boxed{(\forall z) \ni a}$$

4. Найдите значения параметра m , при которых выражение

$$\text{а) } x^2 - 2(2 + m)x + 12 + m^2; \quad \text{б) } 2mx^2 + (2m - 4)x + \frac{m}{2} + 3$$

является полным квадратом.

$$\boxed{\frac{m}{2} = m \text{ (} \forall z = m \text{)}}$$

5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(2a - 1)x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ имеет не более одного решения.

$$\boxed{\left(\infty + ; \frac{91}{61\sqrt{2} + 91}\right] \cap \left\{\frac{2}{1}\right\} \cap \left[\frac{91}{61\sqrt{2} - 91}; \infty -\right) \ni a}$$

6. При каких a уравнение $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?

$$\boxed{(\infty + ; 0) \cap (0; \frac{9}{1} -) \cap \{8 -\} \ni a}$$

7. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ xy = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

$$\boxed{\frac{1}{1} = a}$$

8. При всех значениях a решите уравнение $x^2 + 2ax - 1 = 0$.

$$\boxed{1 + \sqrt{2} \mp a = x}$$

9. При всех значениях a решите уравнение $x^2 - 2ax + 1 = 0$.

$$\boxed{\text{Если } a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty), \text{ то } x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}; \text{ если } a \in (-1; 1), \text{ то решений нет}}$$

10. При всех значениях a решите уравнение $ax^2 + 3x - 1 = 0$.

$$\boxed{\text{Если } a \in (-\infty; -\frac{2}{9}), \text{ то решений нет; если } a \in [-\frac{2}{9}; 0) \cup (0; +\infty), \text{ то } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4a}}{2a}; \text{ если } a = 0, \text{ то } x = \frac{1}{3}}$$

11. При всех значениях a решите уравнение $(a - 1)x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0$.

$$0 = x \text{ ол } 1, \text{ ил } a \text{ ил } a = \frac{1-a}{2}; \text{ есл } \frac{1-a}{2} = x \text{ ол } [2\sqrt{2} + 2; 1) \cap (1; 2\sqrt{2} - 2] \ni a \text{ ил } a \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}; +\infty), \text{ то решение нет};$$

12. Найдите, при каких p отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4 .

$$9 \mp = d$$

13. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2 - (3k + 2)x + k^2 - 1 = 0$ втрое меньше другого?

$$7 = q$$

14. Найдите все значения a , при каждом из которых один корень уравнения

$$\text{а) } 9x^2 - 18(a - 1)x - 8a + 24 = 0; \quad \text{б) } x^2 + 4(a - 2)x + 9a^2 + 5 = 0$$

вдвое больше другого.

$$\frac{67}{206\sqrt{3\mp}} = v \text{ (9) } 2 = v \text{ ил } 1 = v \text{ (в)}$$

15. При каких a сумма квадратов различных корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ больше 1?

$$(\infty + \sqrt{2}; 2) \cap (1 - \sqrt{2}; -\infty) \ni v$$

16. При каких a сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов корней?

$$\frac{2}{1} = v \text{ ил } 1 = v$$

17. При каких a сумма кубов различных корней уравнения $x^2 - x + a = 0$ не больше 1?

$$(\frac{1}{1}; 0] \ni v$$

18. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ максимальна?

$$0 = v$$

19. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 2 = 0$ минимальна?

$$1 = v$$

20. При каких a разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$ равна 1?

$$6 = v \text{ ил } 8 - = v$$

21. При каких a один из корней уравнения $8x^2 - 30x + a = 0$ равен квадрату другого?

$$125 = = v \text{ ил } 27 = v$$

22. При каком целом значении параметра b корни уравнения $5x^2 + bx - 28 = 0$ удовлетворяют условию $5x_1 + 2x_2 = 1$?

$$13 = q$$

23. Найдите числа p и q , если известно, что они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

$$\boxed{z = b \vee z = d \text{ или } 0 = b = d}$$

24. Найдите все a , при которых уравнение $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ имеет только положительные корни.

$$\boxed{[9; 2] \ni v}$$

25. Найдите все a , при которых уравнение $(2 - x)(x + 1) = a$ имеет два различных неотрицательных корня.

$$\boxed{\left(\frac{1}{6}; 2\right] \ni v}$$

26. Найдите все a , при которых уравнение $(a - 3)x^2 - 6x + a + 5 = 0$ имеет только отрицательные корни.

$$\boxed{(-\infty; -9] \ni v}$$

27. При каких t уравнение $3tx^2 - (7t + 1)x + 2t + 1 = 0$ имеет корни разных знаков?

$$\boxed{\left(0; \frac{2}{1}\right) \ni u}$$

28. При каких a уравнение $x^2 + (4 - 2a)x + a = 0$ имеет неотрицательный корень?

$$\boxed{(\infty +; 4] \cap [0; \infty -) \ni v}$$

29. При каких a уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

$$\boxed{9 = v}$$

30. При каком целом b уравнения $2x^2 + (3b - 1)x - 3 = 0$ и $6x^2 - (2b - 3)x - 1 = 0$ имеют общий корень?

$$\boxed{z = q}$$

31. При каких a уравнения

$$x^2 + (a^2 - 5a + 6)x = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2(a - 3)x + a^2 - 7a + 12 = 0$$

равносильны?

$$\boxed{4 = v \text{ или } 3 = v}$$

32. При всех a решить неравенство $x^2 + 2ax + 1 \leq 0$.

$$\boxed{\text{Если } a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty), \text{ то } x \in [-1; -1] \text{ или } x \in [1; 1]. \text{ Если } a \in [-1; 1], \text{ то } x \in [-1; 1].}$$

$$\boxed{\text{Если } a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty), \text{ то } x \in [-1 - \sqrt{a^2 - 1}; -1 + \sqrt{a^2 - 1}].}$$

33. При всех a решить неравенство $ax^2 - 2x + 1 > 0$.

$$\boxed{\text{Если } a \in (0; 1], \text{ то } x \in \left(\frac{1}{a}; \infty\right) \cup \left(\frac{1}{1 - \sqrt{1 - a}}; \infty\right). \text{ Если } a \in (1; \infty), \text{ то } x \in \text{любой обое}$$

$$\boxed{\text{Если } a \in (-\infty; 0), \text{ то } x \in \left(\frac{1}{1 - \sqrt{1 - a}}; \frac{1}{1 + \sqrt{1 - a}}\right). \text{ Если } a = 0, \text{ то } x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)}$$

42. («Шаг в будущее», 2022, 8.1) Найдите все значения параметра a , при которых выполнено $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2 - (a + 2)x - 2a - 4 = 0$.

$$\frac{1}{9} - a$$

43. («Шаг в будущее», 2021, 8.1) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 + ax - a}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

имеет ровно одно решение?

$$\frac{7}{6} - a$$

44. («Росатом», 2016, 8.1) При каких целых a уравнение $(ax - 8)(2x - a) = 0$ имеет ровно два целых решения? Найдите эти решения.

$$8 \mp a \text{ и } \frac{8}{a} = a$$

45. («Росатом», 2023, 8.2) При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + (a + 2\sqrt{6})\left(\frac{1}{a} - 2\sqrt{6}\right) = 0$$

целые числа?

$$9 \wedge \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = a$$

46. («Шаг в будущее», 2023, 8.2) При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - x + a - a^2}{x - 2} = 0$$

имеет два различных решения?

$$(\infty + \frac{7}{2}) \cap (\frac{7}{2} : \frac{7}{2}) \cap (\frac{7}{2} : 1 -) \cap (1 - : \infty -) \ni a$$

47. («Шаг в будущее», 2021, 8.1) При каких целых значениях параметра a для корней x_1, x_2 уравнения $3x^2 - x(a + 3) + a = 0$ выражение $\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}$ будет натуральным числом?

$$9 \wedge \frac{7}{2} : \frac{7}{2} : 0$$

48. («Шаг в будущее», 2018, 8.5) При каких целых значениях параметра a выражение

$$\frac{x_1 + x_2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$$

принимает целые значения, если x_1 и x_2 — различные корни уравнения

$$(a - 3)x^2 - 12x + a - 11 = 0?$$

$$a \in \{5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14\}$$

49. («Шаг в будущее», 2017, 8.5) Найдите вид всех квадратных трехчленов $y(x) = ax^2 + bx + k$, где a, b, k — заданные постоянные, таких, что для всех значений x выполняется условие $y(0,01x + 1) = y(-0,01x)$.

$$y + xv - z^{xv} = (x)^n$$

50. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.7) Найдите наименьшее возможное значение $x - y$ при условии $x^2 - 2xy - x + y^2 + y \leq 0$.

0

51. (МГУ, ф-т психологии, 1994) Известно, что $x = 1, y = -1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 3ax + by = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{1111\pi}{6}, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найти остальные решения системы.

$$\frac{v}{z} = n \cdot \frac{v}{1} = x$$

52. (МГУ, ИСАА, 1992) Найти все a , при которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$$

принимает наименьшее значение.

$$z = v$$

53. (МГУ, мехмат, 1989) Найти все a , при которых выражение

$$(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1),$$

где $x_{1,2}$ — корни квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 + ax + a + \frac{1}{5},$$

принимает наименьшее значение.

$$\frac{v}{1} = v$$

54. (МГУ, социологич. ф-т, 2001) Найти все a , при которых уравнение

$$ax^2 + (2a + 2)x + a + 3 = 0$$

имеет два корня и расстояние между ними больше 1.

$$(\underline{z}^{\wedge} z + z - ; 0) \cap (0; \underline{z}^{\wedge} z - z -) \ni v$$

55. (МГУ, химический ф-т, 2007) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a + 4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

$$\left\{ \frac{6}{5}, -\frac{1}{5} \right\} \cap [0; 1) \ni a$$

56. (МГУ, филологич. ф-т, 2000) Найти все a , при которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

$$\left\{ \frac{6}{5}, 0, -\frac{1}{5} \right\} \ni a$$

57. (МГУ, географич. ф-т, 1992) Найти все тройки (a, b, c) , при которых уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет единственный корень $x = -1$, причём $a + b + c = 1$.

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right) \text{ и } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

58. (МГУ, географич. ф-т, 1996) Найти все пары (a, b) , при которых ненулевые векторы

$$\vec{u} = (a(2 - b), 2a - 3, a(b - 2)) \quad \text{и} \quad \vec{v} = (2 - b, a - 2, b - 2)$$

коллинеарны, но не равны. Найти все $a = b$, при которых эти векторы перпендикулярны.

$$\frac{2}{3} \neq 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1$$

59. (МГУ, геологич. ф-т, 1979) Найти все α , при которых уравнение

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} + 36 = 0$$

имеет единственный корень.

$$\mathbb{Z} \ni n, n \neq 0, n \neq 1, n \neq 2, n \neq 3, n \neq 4, n \neq 5, n \neq 6, n \neq 7, n \neq 8, n \neq 9, n \neq 10, n \neq 11, n \neq 12, n \neq 13, n \neq 14, n \neq 15, n \neq 16, n \neq 17, n \neq 18, n \neq 19, n \neq 20, n \neq 21, n \neq 22, n \neq 23, n \neq 24, n \neq 25, n \neq 26, n \neq 27, n \neq 28, n \neq 29, n \neq 30, n \neq 31, n \neq 32, n \neq 33, n \neq 34, n \neq 35, n \neq 36, n \neq 37, n \neq 38, n \neq 39, n \neq 40, n \neq 41, n \neq 42, n \neq 43, n \neq 44, n \neq 45, n \neq 46, n \neq 47, n \neq 48, n \neq 49, n \neq 50, n \neq 51, n \neq 52, n \neq 53, n \neq 54, n \neq 55, n \neq 56, n \neq 57, n \neq 58, n \neq 59, n \neq 60, n \neq 61, n \neq 62, n \neq 63, n \neq 64, n \neq 65, n \neq 66, n \neq 67, n \neq 68, n \neq 69, n \neq 70, n \neq 71, n \neq 72, n \neq 73, n \neq 74, n \neq 75, n \neq 76, n \neq 77, n \neq 78, n \neq 79, n \neq 80, n \neq 81, n \neq 82, n \neq 83, n \neq 84, n \neq 85, n \neq 86, n \neq 87, n \neq 88, n \neq 89, n \neq 90, n \neq 91, n \neq 92, n \neq 93, n \neq 94, n \neq 95, n \neq 96, n \neq 97, n \neq 98, n \neq 99, n \neq 100$$

60. (МГУ, физический ф-т, 1988) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{2}{3} \neq 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1 \text{ или } \frac{2}{3} = 1$$

61. (МГУ, мех.мат., 1987) Найти все пары (a, b) , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти различных решений.

$$\boxed{7 = q, \text{ «} \text{»} - v; \text{ «} \text{»} = q, \text{ «} \text{»} = v}$$

62. (МГУ, мех.мат., 2007) Графики двух функций

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad \text{и} \quad g(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

пересекаются в двух точках. Найдите коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

$$\boxed{\frac{6}{2} = q, \frac{6}{2} = v}$$

63. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11) Найдите все значения параметра a , при которых для любого значения параметра b неравенство

$$(a + b)x^2 + (3b - 4a + 7)x + 4a - 2b - 6 \geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

$$\boxed{1 \leq v}$$

64. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Определите, сколько существует различных значений a , при которых уравнение

$$(a^2 - 5)x^2 - 2ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\text{Л}} \text{ «} \text{»}$$

65. («Ломоносов», 2015, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(a - 6)x^2 + 8x - 4}{x - 2} = 0$$

имеет ровно один корень. В ответе укажите сумму всех таких значений a .

$$\boxed{11}$$

66. («Ломоносов», 2014, 10–11) Найдите сумму всех таких целых значений a , принадлежащих отрезку $[-2012; 2013]$, при которых уравнение

$$(a - 1)x^2 - 2(1 - a)x + \frac{a - 5}{a + 4} = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

$$\boxed{2021}$$

67. («Ломоносов», 2012, 9) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнения

$$x^2 + ax + 2012 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2012x + a = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

2012, -2013

68. («Ломоносов», 2014, 10–11) Найдите наименьшее значение a , при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 3ax + a^2 = 0$ равна 2,52.

9,0-

69. («Физтех», 2014, 9–11) При каком значении параметра a значение выражения $x_1^2 + x_2^2$ будет наименьшим, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 4ax + 4a - 3 = 0$?

0,25

70. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) Найдите a такое, что сумма квадратов действительных корней уравнения $x^4 + ax^2 - 2017 = 0$ равна 4.

1006,5

71. («Ломоносов», 2014, 9) Найдите все значения a , при которых сумма модулей корней уравнения $x(x + a - 1) = a^2$ равна 2.

$\frac{8}{3}, 1$

72. («Ломоносов», 2014, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трёхчлена $x^2 + 2ax + 4a$ равна 3.

$\frac{2}{1}$

73. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (2 + a)x - 6a^2 + 11a = 3$$

имеет два корня x_1 и x_2 , удовлетворяющие неравенству $\frac{2x_1}{x_2} + \frac{x_2}{2x_1} \leq 2$.

$(\infty + ; \frac{7}{8}) \cap \{1; \frac{8}{3}\} \cap (\frac{8}{1}; \infty -)$

74. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите наименьшее натуральное число q , для которого существует такое целое число p , что уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ имеет четыре корня, образующих арифметическую прогрессию.

6

75. («Физтех», 2019, 9) При каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$(x + 2)\sqrt{ax + x - x^2 - a} \geq 0$$

найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

$(\infty + ; 9] \cap [8 - ; 9 -] \ni v$

76. («Физтех», 2019, 9) При каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$(x^2 - ax - x + a)\sqrt{x+5} \leq 0$$

найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

$$(\infty+; q] \cap [r-; \infty-) \ni v$$

77. («Ломоносов», 2015, 8–9) График квадратичной функции $f(x) = x^2 + 2px - p^2 + 7p - 2015$ пересекает координатные оси в трёх точках A , B и C . Найдите значение p , при котором произведение длин отрезков $OA \cdot OB \cdot OC$ будет наименьшим.

$$\frac{z}{z}$$

78. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9) Изобразите на координатной плоскости множество таких точек (p, q) , что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а другой — меньше 0.

79. («Физтех», 2023, 10) Найдите максимальное значение y , при котором существует ровно два значения переменной x , удовлетворяющих уравнению $\sqrt{6-y} + \sqrt{y+2} = x^4 - 8x^2 + 20$.

$$z$$

80. (Всеросс., 2010, МЭ, 11) При каких значениях c числа $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ могут являться корнями квадратного уравнения $5x^2 - 3x + c = 0$ (α — некоторый угол)?

$$g/8- = c \text{ и } \Pi$$

81. (МГУ, мехмат, 2001-03.6) Найти все a , при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{g}{4} \cdot \frac{p}{8} - = v$$

82. («Высшая проба», 2020, 11.3) Найдите все вещественные c , при которых сумма девярых степеней корней уравнения

$$x^2 - x + c = 0$$

равна нулю, и сумма пятнадцатых степеней тоже равна нулю. Замечание: корни могут быть комплексными.