Параметры. Необходимые условия

В некоторых задачах определённые требования должны выполняться *при любых* значениях переменной или параметра. В таких ситуациях может пригодиться следующая идея: рассмотреть *конкретные* удобные значения этой величины, получив тем самым *необходимые* условия, а затем выяснить, какие из полученных условий являются ещё и *достаточными*.

Задача 1. (*МГУ, ф-т психологии, 1978*) Найти множество всех пар чисел (a, b), для каждой из которых равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 \tag{1}$$

справедливо при любых значениях x.

Решение. Коль скоро x должен быть любым, равенство (1) обязано выполняться, в частности, для $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в (1), получим:

$$b^2 = \cos b^2 - 1.$$

Отсюда неизбежно $b = 0$ (поскольку $b^2 \geqslant 0$, $\cos b^2 - 1 \leqslant 0$, и равенство возможно только в том случае, если обе части обращаются в нуль одновременно). Подставляем $b = 0$ в (1):

$$a(\cos x - 1) = \cos ax - 1. \tag{2}$$

Равенство (2) должно выполняться для любого x, поэтому подставим $x = 2\pi$:

$$0 = \cos 2\pi a - 1,$$

откуда $2\pi a = 2\pi n$ и $a = n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Равенство (2) примет вид:

$$n(\cos x - 1) = \cos nx - 1. \tag{3}$$

Подставим сюда $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-n = \cos\frac{n\pi}{2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{n\pi}{2} = 1 - n.$$

Отсюда $n = 0, 1, 2$. Таким образом, мы с необходимостью получаем следующие пары (a, b): $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$. Иных пар быть не может (то есть получены необходимые условия); остаётся проверить, какие из них действительно годятся (то есть какие из необходимых условий являются к тому же достаточными).

Проверим пару $(0, 0)$. Подставляя $a = 0$, $b = 0$ в равенство (1), получим $0 = 0$. Значит, пара $(0, 0)$ нам подходит.

Проверим пару $(1, 0)$. Подставляя $a = 1$, $b = 0$ в (1), получим $\cos x - 1 = \cos x - 1$. Это равенство выполнено для любого x, поэтому пара $(1, 0)$ также подходит.

Проверим пару $(2, 0)$. Подставляя $a = 2$, $b = 0$ в (1), получим $2(\cos x - 1) = \cos 2x - 1$. Это равенство не выполняется, например, для $x = \frac{\pi}{3}$, поэтому пара $(2, 0)$ не годится.

Ответ: $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Замечание. Можно было бы немного сократить решение, если вместо $x = \frac{\pi}{2}$ подставить $x = \pi$ (тогда пара $(2, 0)$ не возникнет — убедитесь в этом самостоятельно). Наше решение, однако, преследовало чисто методическую цель: показать, что *возникающие в подобных ситуациях необходимые условия вовсе не обязаны быть достаточными*, поэтому последующая проверка обязательна!

Задача 2. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

имеет решение для любого b.

Решение. Система должна иметь решение, в частности, при $b = 0$. Подставляя $b = 0$ в первое уравнение системы, получим $a^2 = 1$, то есть $a = \pm 1$. Это необходимые условия на параметр a (иные значения a заведомо не годятся); остаётся проверить, являются ли эти условия достаточными.

Пусть $a = 1$. Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} 2^{bx} + 2by^2 = 1, \\ y^3 = 1, \end{cases}$$

и надо проверить, имеет ли она решения для любого b. Из второго уравнения имеем $y = 1$; после подстановки этого значения в первое уравнение получим

$$2^{bx} = 1 - 2b.$$

Это уравнение не имеет решений, например, при $b = 1$. Следовательно, $a = 1$ не годится.

Пусть теперь $a = -1$. С этим a система примет вид:

$$\begin{cases} 2^{bx} = 1, \\ -2x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что пара $(0, 1)$ будет решением этой системы при любом b. Значит, $a = -1$ нам подходит.

Ответ: $a = -1$.

Задачи

1. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \left(x^2+1\right)^a + \left(b^2+1\right)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом b.

$\boxed{a = 1}$

2. (*МГУ, ф-т психологии, 1978*) Найти все пары (a, b), при которых равенство

$$\sin(ax + b) = a\sin x + b$$

выполняется для всех x.

$\boxed{(1,0),\ (-1,0),\ (0,0)}$

3. (*МГУ, геологич. ф-т, 1996*) Найти все a, при которых для любого b уравнение

$$\cos(b + ab + bx) + 2\cos\left(b^2 x\right) = 3a^2$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{a = -1}$

4. (*МГУ, геологич. ф-т, 1998*) Найти все a, при которых для любого $b \geqslant 2$ неравенство

$$(b-1)x + 2\sqrt{1 - (b-1)^{-2}} < \left(\frac{a+1}{b-1} - b + 1\right) \cdot \frac{1}{x}$$

выполняется при всех $x < 0$.

$\boxed{a \leqslant 0}$

5. (*МГУ, мехмат, 1989*) Найти все a, при которых для любого b система

$$\begin{cases} 2\left(1 + |y|\right)^a + \left(b^2 - 2b + 2\right)^x = 3, \\ xy(x + b - 1) = 2a^2 - 3a + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{a = \frac{1}{2}, 1}$

6. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2000*) Найти все значения a, при которых для любого b уравнение

$$|x - 2| + b|2x + 1| = a$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{a = \frac{5}{2}}$

7. (*МГУ, ИСАА, 1993*) Найти все значения a, при которых неравенство

$$x^2 + 2|x - a| \geqslant a^2$$

справедливо для всех x.

$\boxed{a \in [-1; 1]}$

8. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1998*) Определите, 1) при каких значениях a существует такое число b, что уравнение

$$5\cos x + \sin x + \cos(x - b) = a$$

имеет решения; 2) при каких a это уравнение имеет решения для любого b.

$\boxed{a \in \left[-\sqrt{26} - 1; \sqrt{26} + 1\right];\ б)\ a \in \left[-\sqrt{26} + 1; \sqrt{26} - 1\right]}$

9. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2005*) Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение

$$a \log_{\frac{1}{x}-2} 4 = \log_2 \left(\frac{1}{x} - 2\right) - b$$

имеет хотя бы одно решение, меньшее $1/3$.

$\boxed{a \geqslant 0}$

10. (*МГУ, ИСАА, 1996*) При каких значениях a неравенство

$$\log_{\frac{2a-15}{5}} \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5} > 0$$

выполняется для всех x?

$\boxed{a \in \left(\frac{15}{2}; 8\right) \cup (12; +\infty)}$

11. (*МГУ, экономич. ф-т, 1977*) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geqslant x - axy + y - 25x^2$$

выполняется для любых таких пар (x, y), что $|x| = |y|$.

$\boxed{a = 50}$

12. (*МГУ, ф-т фунд. медицины, 2003*) Найти все значения b, при которых для любой пары чисел (s, t) функция

$$f(x) = tx^4 - s(b^2 - 4)x^3 + bx - s - 2$$

удовлетворяет хотя бы одному из условий $f(1) > -2$, $f(-1) < 2$.

$\boxed{b = 2}$

13. (*МГУ, мехмат, 1986*) Найти все a, при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

$\boxed{a \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]}$

14. (*ОММО, 2018*) Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

$\boxed{a = 14}$

15. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Для любого натурального n и для любого набора чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n из отрезка $[0;3]$ уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} |x - x_i| = an$$

имеет решение x, принадлежащее отрезку $[0;3]$. Укажите, какие из следующих значений a удовлетворяют этому условию: a) $a = 0$; b) $a = \frac{3}{2}$; c) $a = 2$.

$\boxed{\text{Только } a = \frac{3}{2}}$