Параметры. Свойства функций

В данном листке собраны задачи, в которых ключевую роль играют различные свойства функций: возрастание, убывание, экстремумы и т. д.

Задача 1. (*«Ломоносов», 2005*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

Решение. Запишем уравнение в виде $f(x)=0$, где

$$f(x)=\big||x-a|+2x\big|+4x-8|x+1|.$$

Функция f является кусочно-линейной: на каком бы промежутке мы ни снимали модули, наша функция будет иметь вид $f(x)=kx+b$.

Если $x\in E_1=(-\infty;-1]$, то наименьшее возможное значение k равно $-1-2+4+8=9$; следовательно, $k>0$ при любом $x\in E_1$, и функция f монотонно возрастает на множестве E_1. Если же $x\in E_2=(-1;+\infty)$, то наибольшее возможное значение k равно $1+2+4-8=-1$; значит, $k<0$ при всех $x\in E_2$, и функция f монотонно убывает на множестве E_2.

Таким образом, функция f достигает в точке $x=-1$ своего наибольшего значения на $\mathbb{R}$; множество значений функции f есть луч $(-\infty;c]$, где

$$c=f(-1)=\big||a+1|-2\big|-4.$$

Уравнение $f(x)=0$ не имеет решений тогда и только тогда, когда $c<0$, то есть

$$\big||a+1|-2\big|-4<0\quad\Leftrightarrow\quad\big||a+1|-2\big|<4\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad -4<|a+1|-2<4\quad\Leftrightarrow\quad -2<|a+1|<6\quad\Leftrightarrow\quad -7<a<5.$$

Ответ: $(-7;5)$.

Задачи

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017*) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$a\log_3 x+\log_{\frac12}x>1$$

имеет решения, причём среди решений нет бо́льших 1.

$\boxed{(-\infty;\log_2 3)}$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+2y^2+2y(x-a)+a^2=0,\\ 2^{-2-y}\cdot\log_2 x<1\end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

$\boxed{-2<a<0;\ x=-a,\ y=a}$

3. (*ОММО, 2017*) При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x+4\right)+2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}\left(2|x-a|+3\right)=0$$

имеет ровно три решения?

$\boxed{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|}\log_{\sqrt[5]{7}}(x^2-2x+3)+5^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{7}}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

$\boxed{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}}$

5. (*«Ломоносов», 2014)* Найдите все пары (a, b), при которых множество решений неравенства

$$\log_{2014}(x-a)>2x^2-x-b$$

совпадает с промежутком $(0; 1)$.

$\boxed{a=-\frac{1}{2013},\ b=\log_{2014}2013}$

6. (*«Ломоносов», 2019*) Сколько существует значений параметра a, при которых уравнение

$$4a^2+3x\lg x+3\lg^2 x=13a\lg x+ax$$

имеет единственное решение?

$\boxed{2}$

7. (*«Ломоносов», 2013*) Функция $f(t)$ с областью определения $D(f)=[1;+\infty)$ удовлетворяет уравнению

$$f\left(\frac{4^y+4^{-y}}{2}\right)=y$$

для любого $y\geqslant 0$. Для каждого значения $a\neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{a}{x+2a}\right)\leqslant 1$.

$\boxed{\text{Если } a>0, \text{ то } x\in\left[-\frac{26a}{17};-a\right]; \text{ если } a<0, \text{ то } x\in\left[-a;-\frac{26a}{17}\right]}$

8. (*«Ломоносов», 2005*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

$\boxed{(-7;5)}$

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019*) Для каждого значения a решите уравнение

$$\left|x-2^{\frac{1}{\sin^2(2a)}}\right|+\left|x-2^{-4\operatorname{tg}(3a)}\right|+a\left(a+\frac{\pi}{12}\right)^2\left(a-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

$\boxed{x=16 \text{ при } a=-\frac{\pi}{12}; \text{ при остальных } a \text{ решений нет}}$

10. (*МГУ, экономич. ф-т, 1978*) Найти все значения a, при которых неравенство

$$a(4-\sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$$

выполняется для всех x.

$\boxed{a > \frac{3}{82}}$

11. (*МГУ, мехмат, 1993*) Найти все a, при которых неравенство

$$\log_5\left(a\cos 2x - \left(1 + a^2 - \cos^2 x\right)\sin x + 4 - a\right) \leqslant 1$$

выполняется для всех x.

$\boxed{a \in [0;1)}$

12. (*МГУ, мехмат, 2000-05.5*) Найти все a, при которых уравнение

$$(2a+4)x^2 + (5a+10)x + a + 10 = 0$$

имеет два корня и между этими корнями расположен ровно один корень уравнения

$$(a-1)x^4 - (a-1)x^3 - (a-7)x^2 + (10a+5)x - a + 12 = 0.$$

$\boxed{(-\infty;-3) \cup (9;+\infty)}$

13. (*МГУ, мехмат, 2001-05.6*) Найти все значения параметра a, при каждом из которых графики функций

$$y = \frac{3x+1}{x} \quad \text{и} \quad y = \frac{4x+3a-7}{ax-1}$$

разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

$\boxed{[0;1]}$

14. (*МГУ, мехмат, 2003-05.6*) Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_x \frac{x-a}{1-ax} + \log_{x-1} \frac{x-a-1}{a+1-ax} \geqslant 0$$

имеет хотя бы три целочисленных решения.

$\boxed{-1 \leqslant a < \frac{1}{5}}$

15. (*МГУ, ДВИ, 2013.8*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin\left(x + \frac{a}{x}\right) = x + 1$$

имеет бесконечно много решений.

$\boxed{a \neq 0}$