Параметры. Линейные уравнения и неравенства

Среди всего многообразия задач с параметрами наиболее простыми являются линейные уравнения и неравенства. Поэтому начать разумно именно с них.

Задача 1. При всех значениях параметра a решить уравнение $2x + a = 3$.

Решение. Решать тут особо нечего: выражаем x и пишем ответ.

Ответ: $x = \frac{3-a}{2}$.

Задача 2. При всех значениях параметра a решить уравнение $ax = 1$.

Решение. Хочется просто написать $x = \frac{1}{a}$, но нужно проявить осторожность. Ведь a «никому ничем не обязано» и может равняться нулю, а на нуль нелить нельзя! Поэтому решение должно выглядеть так.

Если $a = 0$, то решений нет (поскольку вне зависимости от x получается неверное числовое равенство $0 = 1$). Если же $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

Ответ: Если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет.

Задача 3. При всех значениях a решить уравнение $(a + 2)x = a^2 - 4$.

Решение. Имеем:

$$(a + 2)x = (a + 2)(a - 2).$$

Если $a = -2$, то независимо от x получается верное числовое равенство $0 = 0$, так что в этом случае x — любое число. Если же $a \neq -2$, то сокращаем обе части на ненулевое выражение $a + 2$ и получаем $x = a - 2$.

Ответ: Если $a \neq -2$, то $x = a - 2$; если $a = -2$, то x любое.

Задача 4. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение. Выразим из первого уравнения y:

$$y = \frac{ax - a - 1}{4}\,, \tag{1}$$

и подставим во второе уравнение системы:

$$2x + \frac{(a + 6)(ax - a - 1)}{4} = a + 3.$$

Умножаем на 4, раскрываем скобки и приводим подобные:

$$(a^2 + 6a + 8)x = a^2 + 11a + 18.$$

Раскладываем на множители оба квадратных трёхчлена:

$$(a + 2)(a + 4)x = (a + 2)(a + 9). \tag{2}$$

Если $a \neq -2$ и $a \neq -4$, то уравнение (2) имеет (единственное) решение $x = \frac{a+9}{a+4}$. Подставляя его в (1), найдём соответствующее значение y. Полученная пара (x, y) будет (единственным) решением нашей системы при указанных a.

Если $a = -2$, то уравнение (2) превращается в верное числовое равенство $0 = 0$ независимо от x. Поэтому любое число x является решением уравнения (2). Соотношение (1) даёт соответствующее число y, так что любая пара $\left(x, \frac{ax-a-1}{4}\right)$ служит решением нашей системы. Стало быть, при $a = -2$ система имеет бесконечно много решений.

Наконец, если $a = -4$, то уравнение (2) превращается в неверное числовое равенство $0 = 10$ независимо от x и потому не имеет корней. Но уравнение (2) является следствием исходной системы; значит, при $a = -4$ не имеет решений и сама система.

Мы рассмотрели все возможные значения a. Как видим, система не имеет решений только при $a = -4$.

Ответ: -4.

Задача 5. При всех a решить неравенство $ax > 1$.

Решение. Здесь предстоит деление на a, поэтому необходимо рассмотреть три случая.

Если $a = 0$, то неравенство превращается в неверное числовое неравенство $0 > 1$. Поэтому при $a = 0$ решений нет.

Если $a > 0$, то делим наше неравенство на a; при этом знак неравенства сохраняется: $x > \frac{1}{a}$.

Если $a < 0$, то опять-таки делим на a, но при этом знак неравенства меняется: $x < \frac{1}{a}$.

Ответ: Если $a > 0$, то $x > \frac{1}{a}$; если $a < 0$, то $x < \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то решений нет.

Задача 6. При каких a неравенство $2x - a \leqslant 3$ является следствием неравенства $3a - x > 5$?

Решение. По определению, неравенство 2 является *следствием* неравенства 1 (или из неравенства 1 *следует* неравенство 2), если каждое решение неравенства 1 является также решением неравенства 2; иными словами, множество решений неравенства 1 содержится в множестве решений неравенства 2.

В нашем случае неравенством 1 является неравенство $3a - x > 5$, решения которого:

$$x < 3a - 5. \tag{3}$$

Неравенством 2 служит неравенство $2x - a \leqslant 3$, решения которого:

$$x \leqslant \frac{3+a}{2}. \tag{4}$$

Множество (3) должно содержаться в множестве (4), то есть каждая точка луча $(-\infty; 3a-5)$ должна принадлежать лучу $\left(-\infty; \frac{3+a}{2}\right]$. Так будет, если вершина первого луча находится левее вершины второго луча или совпадает с ней:

$$3a - 5 \leqslant \frac{3+a}{2}.$$

Остаётся решить это неравенство:

$$a \leqslant \frac{13}{5}.$$

Ответ: $a \leqslant \frac{13}{5}$.

Задачи

1. При всех значениях a решите уравнение $0{,}2x - a = 1$.

$x = 5(a+1)$

2. При всех значениях a решите уравнение $ax = 0$.

Если $a \neq 0$, то $x = 0$; если $a = 0$, то x любое

3. При всех значениях a решите уравнение $(a-1)x = a+3$.

Если $a \neq 1$, то $x = \frac{a+3}{a-1}$; если $a = 1$, то решений нет

4. При всех значениях a решите уравнение $(a^2 - 16)x = a - 4$.

Если $a \neq -4$ и $a \neq 4$, то $x = \frac{1}{a+4}$; если $a = -4$, то решений нет; если $a = 4$, то x любое

5. При каких a и b уравнение $(a+5)x = 2b - 6$ имеет бесконечно много решений?

$a = -5$, $b = 3$

6. При каких k и m уравнение $(k^2 + 2k - 3)x = m + 4$ не имеет решений?

$k = 1$ или $k = -3$, и при этом $m \neq -4$

7. При каких b система

$$\begin{cases} -4x - 4by = b + 1, \\ (b+1)x + 2y = b + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

$b = -2$ или $b = 1$

8. При каких m система

$$\begin{cases} (m-2)x + 27y = 4{,}5, \\ 2x + (m+1)y = -1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

$m = -7$

9. Найдите все значения p, при которых система

$$\begin{cases} 2x + (9p^2 - 2)y = 3p, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

$p = -\frac{2}{3}$

10. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

$a = -\frac{2}{3}$

11. Найдите все такие b, чтобы при любом значении a система

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$$

имела хотя бы одно решение.

$b = 3$

12. При всех a решить неравенство $ax \leqslant 0$.

Если $a > 0$, то $x \leqslant 0$; если $a < 0$, то $x \geqslant 0$; если $a = 0$, то x любое

13. При всех a решить неравенство $(a^2 - 3a + 2)x \geqslant a - 1$.

Если $a < 1$ или $a > 2$, то $x \geqslant \frac{1}{a-2}$; если $1 < a < 2$, то $x \leqslant \frac{1}{a-2}$;

если $a = 1$, то x любое; если $a = 2$, то решений нет

14. При каких a из неравенства $x + a \geqslant 1$ следует неравенство $3x > a$?

$a < \frac{3}{4}$

15. При каких a из неравенства $2x + a < 2$ следует неравенство $x < -2$?

$a \geqslant 6$

16. При каких a неравенство $a - x \leqslant 3$ является следствием неравенства $x > 4$?

$a \leqslant 7$

17. При каких a неравенства $2x + a < 3$ и $x - 4a < -1$ равносильны[1]?

$a = \frac{5}{9}$

18. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x - a \geqslant 1, \\ x + a < 3 \end{cases}$$

имеет решения?

$a < 1$

[1] Напомним, что два неравенства называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если множества их решений совпадают. Иными словами, равносильные неравенства являются следствиями друг друга.

19. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} 2x + 3a < 1, \\ 2 - x < a \end{cases}$$

не имеет решений?

$\boxed{a \geqslant -3}$

20. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} a - 3x \geqslant 5, \\ a \leqslant x + 3 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

$\boxed{a = 2}$

21. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x + 4a \leqslant 7, \\ 2x - a \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

$\boxed{a < \frac{14}{9}}$

22. (*«Росатом», 2016, 7.2*) При каких целых a уравнение

$$(2a + 3)x = 4a + 9$$

имеет целые решения?

$\boxed{a = -2,\ a = -1,\ a = -3,\ a = 0}$

23. (*«Росатом», 2016, 7.4*) Найти a, при которых множество решений системы

$$\begin{cases} ax - 2 \leqslant 0, \\ 2x + a \geqslant 0, \end{cases}$$

представляет отрезок на действительной оси длиной 2.

$\boxed{a = 2}$

24. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.4*) Найдите все a, при которых уравнение

$$a^2(x - 2) + a(39 - 20x) + 20 = 0$$

имеет хотя бы два различных корня.

$\boxed{20}$

25. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.1*) При каких значениях a системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15a, \\ \dfrac{1}{a}x + y = 9 \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.

$a = 2$; решение системы $(6; 6)$

26. (*МГУ, физический ф-т, 1981*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

$a = -2$

27. (*МГУ, физический ф-т, 1977*) Найти все a, при которых любое решение системы

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $x > y$.

$a < 6$

28. (*МГУ, физический ф-т, 1982*) Найти все a, при которых уравнение

$$5x - 17a = 21 - 5ax$$

имеет корень, больший 3.

$a \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$

29. (*МГУ, экономический ф-т, 1978*) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} ax + 2y = a + 2, \\ 2ax + (a+1)y = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$a \neq 0$

30. (*МГУ, ВМК, 2002*) При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + \left(2 + \sqrt{2}\right) b + 2\sqrt{2} = b^2 \left(b + \sqrt{2}\right) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

$b = -\sqrt{2}$

31. (*МГУ, ВШБ, 2004*) Найдите все значения параметра $p \in [-4; 4]$, при которых неравенство

$$(p-2) \cdot ((x+1)(p-3) + 2x) > 0$$

выполняется при любых $x \geqslant 0$.

$\boxed{p \in [-4; 1] \cup (3; 4]}$

32. (*МГУ, физический ф-т, 1998*) При каждом a решить неравенство

$$\log_a(3a^x - 5) < x + 1.$$

Если $a \in (0; 1)$, то $x \in \left(-\infty; \log_a \frac{5}{3-a}\right)$; если $a \in (1; 3)$, то $x \in \left(\log_a \frac{5}{3}; \log_a \frac{5}{3-a}\right)$;

если $a \in [3; +\infty)$, то $x \in \left(\log_a \frac{5}{3}; +\infty\right)$; при остальных a решений нет

33. (*МГУ, мехмат, 1995*) Найти все a, при которых любое решение системы

$$\begin{cases} x - a^2 \log_3 y = 1, \\ x + 3a \log_3 y = 1 \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству $y > 1 - x$.

$\boxed{a \neq -3}$

34. (*МГУ, мехмат, 1986*) Найти все a, при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b-6)y - 8az = 8 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{a \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)}$

35. (*МГУ, ВМК, 1993*) Точка $M(x, y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &a^2x - y = 2a^2 - 2b, \\ &x - by = 2 - 2a^2, \end{aligned}$$

лежит на прямой $y = 2 - x$. При каких a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3, -1)$?

$a = b = 0$ или $a \in \mathbb{R}$, $b = -a^2 - 1$

36. (*«Физтех», 2020, 9*) Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

$(1; 3)$, $(3; 1)$, $\left(-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7}\right)$, $\left(-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}\right)$

37. (*«Физтех», 2020, 9*) Найдите все тройки целочисленных параметров a, b и c, при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c, \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

не имеет решений.

$\boxed{(3; 2; 4),\ (-3; -2; -4),\ (-6; -1; -8)}$