Область значений функции

Как вы знаете, у всякой функции $y = f(x)$ имеется область определения и область значений. Область определения $D(f)$ — это множество допустимых значений независимой переменной x. Область значений $E(f)$ — это множество, которое пробегает зависимая переменная y, когда переменная x пробегает область определения $D(f)$.

Например, область значений функции $y = x^2$ есть луч $[0; +\infty)$; область значений функции $y = \sin x$ есть отрезок $[-1; 1]$.

Число a принадлежит области значений функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда найдётся такой x, что $f(x) = a$. Таким образом, нахождение области значений есть задача с параметром: *область значений функции $f(x)$ — это множество всех значений параметра a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение.*

Задача 1. Найти область значений функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Решение. Искомая область значений есть множество всех a, при которых уравнение

$$x + \frac{1}{x} = a$$

имеет решение. Преобразуем:

$$\frac{x^2 - ax + 1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - ax + 1 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте:

$$D = a^2 - 4 \geqslant 0,$$

откуда $a \leqslant -2$ или $a \geqslant 2$.

Ответ: $E(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Запомните этот факт: *сумма двух взаимно обратных чисел по модулю не меньше 2.* Он может вам пригодиться впоследствии.

К нахождению области значений естественным образом сводятся некоторые задачи на вычисление наибольших и наименьших значений функций.

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$.

Решение. Давайте просто найдём область значений данной функции. Ищем все значения a, при которых уравнение

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$$

имеет решения. Умножаем обе части на выражение $x^2 - x + 1$, которое не обращается в нуль ни при каком x, и после преобразований получаем:

$$ax^2 - (a + 1)x + a = 0. \tag{1}$$

Если $a = 0$, то уравнение (1) имеет корень $x = 0$, так что $a = 0$ годится.

Если $a \neq 0$, то уравнение (1) является квадратным. Чтобы оно имело корни, его дискриминант должен быть неотрицателен:

$$D = -3a^2 + 2a + 1 \geqslant 0,$$

откуда $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1$. Этот отрезок содержит значение $a = 0$, полученное ранее.

Итак, мы нашли область значений: $E(f) = \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. Теперь ясно, что наибольшее значение функции f равно 1, а наименьшее значение равно $-\frac{1}{3}$.

Ответ: 1 и $-\frac{1}{3}$.

Задача 3. (*МГУ, экономич. ф-т, 1998*) Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

Решение. Область значений $E(f)$ состоит из всех таких чисел t, для которых уравнение

$$\frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2} = t$$

имеет решения. После равносильных преобразований ($2x^2 - 3x + 2 \neq 0$ при любом x) данное уравнение приводится к виду

$$(2t - 1)x^2 - (3t + c)x + 2t + 1 = 0. \qquad (2)$$

Значение $t = \frac{1}{2}$ можно не рассматривать, поскольку оно принадлежит интервалу $(-1; 2)$, и тем самым нам не важно, принадлежит оно множеству $E(f)$ или нет.

Если $t \neq \frac{1}{2}$, то уравнение (2) является квадратным и имеет корни в том и только в том случае, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D = (3t + c)^2 - 4(2t - 1)(2t + 1) = -7t^2 + 6ct + c^2 + 4 \geqslant 0.$$

Таким образом, мы ищем все значения c, при которых все решения неравенства

$$7t^2 - 6ct - c^2 - 4 \leqslant 0 \qquad (3)$$

расположены на интервале $(-1; 2)$. Пусть

$$g(t) = 7t^2 - 6ct - c^2 - 4.$$

Квадратный трёхчлен $g(t)$ имеет два различных корня t_1 и t_2 при любом c (поскольку его дискриминант $64c^2 + 112$ всегда положителен), и множеством решений неравенства (3) является отрезок $[t_1; t_2]$. Нам нужно, чтобы этот отрезок находился внутри интервала $(1; 2)$, то есть чтобы были выполнены условия $t_1 > -1$ и $t_2 < 2$.

Мы получили стандартную ситуацию расположения корней квадратного трёхчлена внутри заданного промежутка (см. листок «Параметры и квадратный трёхчлен. 2»). Именно, корни квадратного трёхчлена $g(t)$ принадлежат интервалу $(-1; 2)$ тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств (t_0 — абсцисса вершины параболы $y = g(t)$):

$$\begin{cases} g(-1) > 0, \\ g(2) > 0, \\ -1 < t_0 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - 6c - 3 < 0, \\ c^2 + 12c - 24 < 0, \\ -\dfrac{7}{3} < c < \dfrac{14}{3}. \end{cases}$$

Оставшиеся вычисления вы легко выполните сами.

Ответ: $c \in \left(3 - 2\sqrt{3}; 2\sqrt{15} - 6\right)$.

Задача 4. При каких a уравнение

$$(a+1)\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - \frac{3ax^2}{x^2+1} + 4a = 0$$

имеет корни?

Решение. Разумеется, мы делаем замену

$$t = \frac{x^2}{x^2+1}\,, \tag{4}$$

но ещё предстоит выяснить, в каком диапазоне меняется t, когда x пробегает всё множество $\mathbb{R}$. Иными словами, нам нужно найти область значений функции $t(x)$.

Определим, при каких t уравнение (4) имеет решения. Оно равносильно уравнению

$$(1-t)x^2 = t.$$

Если $t = 1$, то решений нет. Если $t \neq 1$, то

$$x^2 = \frac{t}{1-t}\,,$$

и условием наличия решений служит неравенство

$$\frac{t}{1-t} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant t < 1.$$

Итак, $E(t) = [0;1)$. Замена (4) приводит исходное уравнение к квадратному:

$$(a+1)t^2 - 3at + 4a = 0. \tag{5}$$

Следовательно, исходное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда уравнение (5) имеет хотя бы один корень на промежутке $[0;1)$.

Дискриминант уравнения (5) должен быть неотрицателен:

$$D = -7a^2 - 16a = -a(7a+16) \geqslant 0.$$

Рассмотрим сначала случай $D = 0$, то есть $a = 0$ или $a = -\frac{16}{7}$. Уравнение (5) имеет единственный корень $t_0 = \frac{3a}{2(a+1)}$. Если $a = 0$, то $t_0 = 0 \in [0;1)$; поэтому $\boxed{a = 0}$ годится. Если же $a = -\frac{16}{7}$, то $t_0 = -\frac{24}{23} \notin [0;1)$; поэтому $a = -\frac{16}{7}$ не годится.

Пусть теперь $D > 0$, то есть

$$-\frac{16}{7} < a < 0. \tag{6}$$

Уравнение (5) имеет два различных корня. Интересующая нас ситуация, когда хотя бы один из них расположен на промежутке $[0;1)$, логически исчерпывается следующими четырьмя вариантами.

1. *Один из корней равен нулю.*

   Подставляя $t = 0$ в уравнение (5), получим $a = 0$. Значит, только при $a = 0$ уравнение (5) может иметь нулевой корень, и потому данный вариант не реализуется.

2. *Один корень лежит внутри интервала* $(0;1)$*, а второй — вне отрезка* $[0;1]$.

   Данный вариант реализуется тогда и только тогда, когда функция

   $$f(t) = (a+1)t^2 - 3at + 4a$$

   принимает в точках 0 и 1 ненулевые значения разных знаков:

   $$f(0)\cdot f(1) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4a(2a+1) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{-\frac{1}{2} < a < 0.}$$

   Все значения в рамочке подходят, так как удовлетворяют неравенству (6).

3. *Один корень лежит внутри интервала* $(0;1)$*, а второй равен* 1.

   Подставляя $t = 1$ в уравнение (5), получим $2a + 1 = 0$, то есть $a = -\frac{1}{2}$. При этом a уравнение (5) примет вид:

   $$\frac{1}{2}\cdot t^2 + \frac{3}{2}\cdot t - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t^2 + 3t - 4 = 0.$$

   Второй корень полученного уравнения равен $-4 \notin (0;1)$, так что $a = -\frac{1}{2}$ не годится. Стало быть, данный вариант не реализуется.

4. *Оба корня лежат внутри интервала* $(0;1)$.

   Необходимым и достаточным условием такого расположения корней (в рамках текущего случая $D > 0$) служит система (где t_0 — абсцисса вершины параболы $y = f(t)$):

   $$\begin{cases} (a+1)f(0) > 0, \\ (a+1)f(1) > 0, \\ 0 < t_0 < 1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (a+1)a > 0, \\ (a+1)(2a+1) > 0, \\ 0 < \dfrac{3a}{a+1} < 1. \end{cases}$$

   Полученная система решений не имеет (убедитесь в этом самостоятельно), поэтому данный вариант не реализуется.

Остаётся собрать «рамочки» по всем рассмотренным случаям и записать ответ.

Ответ: $a \in \left(-\frac{1}{2};0\right]$.

Задачи

1. (*МГУ, экономич. ф-т, 1985*) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}\,.$$

$\boxed{\frac{7}{23}}$

2. (*МГУ, химический ф-т, 1991*) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{3x+1}{(3x+1)^2 + 1}\,.$$

$\boxed{\frac{1}{2} \text{ и } -\frac{1}{2}}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016*) При каких значениях a и b неравенство

$$b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \leqslant a$$

выполняется для всех действительных x?

$\boxed{a \geqslant 2,\ b < \frac{1}{2}}$

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015*) Найдите все значения a, при которых существует целое число n, удовлетворяющее уравнению

$$n^2 \cdot 3^a - 3^a - 16n = 9 \cdot 3^{-a} - 3^{2-a} \cdot n^2.$$

$\boxed{a = 1 \text{ или } a = \log_3 \frac{16 \pm 5\sqrt{7}}{3}}$

5. (*МГУ, ДВИ, 2014.8*) Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y, \\ g(x, y) &= -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y. \end{aligned}$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

$\boxed{[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]}$

6. (*МГУ, экономич. ф-т, 1998*) Найти все a, при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$$

содержится в интервале $(-3; 2)$.

$\boxed{a \in \left(3 - 2\sqrt{5}; \sqrt{10} - 2\right)}$

7. (*МГУ, ф-т психологии, 1999*) Найти все a, при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{3x + a}{x^2 + 5x + 7}$$

содержит промежуток $(-1; 3]$. При каждом таком a найти область значений этой функции.

$\boxed{a = 9;\ E(f) = [-1; 3]}$

8. (*МГУ, геологич. ф-т, 1988*) Найти все a, при которых область значений функции

$$f(x) = \frac{\sin x + 2(1 - a)}{a - \cos^2 x}$$

содержит отрезок $[1; 2]$.

$\boxed{a \in \left[\frac{1}{3}; \frac{33}{32}\right]}$

9. (*МГУ, ф-т психологии, 1997*) Найти все a, при которых уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = a - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет хотя бы один корень.

$a \geqslant 17$

10. (*МГУ, физический ф-т, 2000*) Найти все a, при которых уравнение

$$25^x - (2a+5) \cdot 5^{x-\frac{1}{x}} + 10a \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два корня.

$a \in \left(0; \frac{1}{50}\right) \cup \left(\frac{25}{2}; +\infty\right)$

11. (*МГУ, экономич. ф-т, 1978*) Найти все a, при которых неравенство

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$$

выполняется для всех x.

$a > \frac{3}{82}$

12. (*МГУ, мехмат, 2001-07.5*) Найти все x, которые не являются корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt[4]{4 - a^4}\,\bigl(x + 4x^2 - 8\bigr)$$

ни при каком a.

$x \in \left(-\infty; -\frac{8}{7}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{9}; +\infty\right)$

13. (*МГУ, ф-т психологии, 1991*) При каждом $a \geqslant \frac{1}{2\pi}$ решить уравнение

$$\cos \frac{2x + a}{2x^2 + 2ax + \frac{5a^2}{2}} = \cos \frac{2x - a}{2x^2 - 2ax + \frac{5a^2}{2}}\,.$$

$x = 0, \pm\frac{a\sqrt{5}}{2}$

14. (*МГУ, ВМК, 2004*) Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения

$$81^x - 8 \cdot 27^x + (20 - 2a) \cdot 9^x + (8a - 21) \cdot 3^x + a^2 - 5a + 6 = 0.$$

При $a < -\frac{17}{4}$ решений нет; при $a = -\frac{17}{4}$ одно решение; при $a \in \left(-\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$ два решения;

при $a = \frac{3}{4}$ три решения; при $a \in \left(\frac{3}{4}; 2\right)$ четыре решения; при $a \in [2; 3)$ три решения; при $a \geqslant 3$ два решения

15. (*МГУ, ф-т психологии, 2005*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x) = \frac{4\sin x + a}{4a - 2\sin x}$$

принимает все значения из отрезка $[0; 1]$.

$a \in [-2; 0) \cup (0; 2]$

16. (*МГУ, геологич. ф-т, 2006*) Найдите все значения a, при которых наибольшее значение функции

$$f(x) = 2x^2 + x(5 - 3a) + a^2 - 3a + 4$$

на отрезке с концами в точках $a - 1$ и -4 минимально. Укажите это значение.

$a = -5$. Искомое значение равно -4

17. (*МГУ, химический ф-т, 2008*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней.

$a > 3 + 2\sqrt{5}$