Параллелограмм

Чтобы решать олимпиадные задачи, связанные с параллелограммом, нужно свободно знать свойства и признаки параллелограмма, сформулированные в соответствующем листке базового курса.

Задача 1. (*«Физтех», 2023, 8*) Медиана BM треугольника ABC в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол $44°$. Найдите угол ABC. Ответ выразите в градусах.

112

Задача 2. (*«Курчатов», 2016, 8.2*) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. В треугольниках OAB, OBC, OCD проведены медианы OM, OM', OM'' и биссектрисы OL, OL', OL'' соответственно. Докажите, что углы $MM'M''$ и $LL'L''$ равны.

Задача 3. (*Всеросс., 2017, МЭ, 8.3*) Точки пересечения графиков четырех функций, заданных формулами $y = kx + b$, $y = kx - b$, $y = mx + b$ и $y = mx - b$, являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

Задача 4. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8.3*) В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN, а из вершины D — высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

Задача 5. (*Всеросс., 2015, МЭ, 8.3*) Вершину A параллелограмма $ABCD$ соединили отрезками с серединами сторон BC и CD. Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол BAD: острым, прямым или тупым.

Задача 6. (*«Высшая проба», 2020, 8.4*) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M так, что равнобедренным оказался каждый из треугольников ABM, AMD, CDM. Найдите все возможные значения углов параллелограмма при этих условиях. (Ответ нужно выразить в градусах).

$\angle A = \frac{360°}{5}$; $\angle A = \frac{360°}{7}$ или $\angle A = 90°$ (углы параллелограмма совпадают)

Задача 7. (*Всеросс., 2019, МЭ, 8.6*) Внутри острого угла расположен выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Оказалось, что для каждой из двух прямых, содержащих стороны угла, выполняется условие: сумма расстояний от вершин A и C до этой прямой равна сумме расстояний от вершин B и D до этой же прямой. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Задача 8. (*Всеросс., 2018, МЭ, 8.6*) Точки M и N — середины сторон BC и AD четырёхугольника $ABCD$. Известно, что $\angle B = 150°$, $\angle C = 90°$ и $AB = CD$. Найдите угол между прямыми MN и BC.

Задача 9. (*ММО, 2015, 8.2*) Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC.

Задача 10. (*ММО, 2013, 8.2*) Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB, точка P — середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении $3 : 1$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

Задача 11. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2014, 8–9*) Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка M так, что $AD = DM$. На стороне AD взята точка N так, что $AB = BN$. Докажите, что $CM = CN$.

Задача 12. (*Турнир городов, 2013, 8–9*) Окружность касается сторон AB, BC, CD параллелограмма $ABCD$ в точках K, L, M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB.

Задача 13. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) Даны параллелограмм $ABCD$ и такая точка K, что $AK = BD$. Точка M — середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90°$.