Параллельность. Сумма углов треугольника

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются. Параллельность прямых a и b обозначается $a \parallel b$.

Аксиома параллельных. Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести двух различных прямых, параллельных данной прямой.

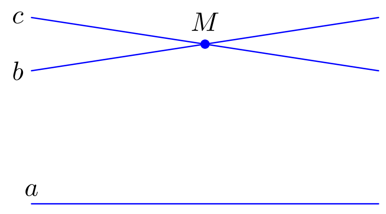

Рис. 1. Невозможно $b \parallel a$ и $c \parallel a$

На рис. 1 показана ситуация, *невозможная* в силу аксиомы параллельных: через точку M, не лежащую на прямой a, проведены две различные прямые b и c, параллельные прямой a.

Задача. Пусть a, b, c — три различные прямые, причём $b \parallel a$ и $c \parallel a$. Докажите, что $b \parallel c$ (*две различные прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой*).

Решение. Предположим, что прямые b и c не параллельны. Тогда они пересекаются в точке M, которая не лежит на прямой a. Возникает невозможная ситуация, изображённая на рис. 1: через точку M проходят две различные прямые, параллельные прямой a. Полученное противоречие с аксиомой параллельных показывает, что $b \parallel c$.

Признак и свойство параллельных прямых

Параллельность прямых тесно связана с равенством углов. Для начала введём нужную терминологию — дадим определения углов, которые образуются при пересечении двух прямых третьей прямой.

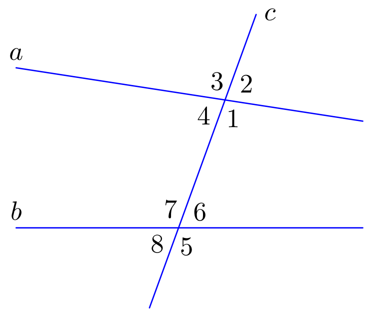

Рис. 2.

Пусть прямые a и b (не обязательно параллельные) пересекаются с прямой c (рис. 2). Как видим, образуются восемь углов: 1, 2, ..., 8. Различные пары этих углов имеют определённые названия.

- *Внутренние накрест лежащие углы* — это углы 1 и 7, углы 4 и 6.

- *Внешние накрест лежащие углы* — это углы 2 и 8, углы 3 и 5.
- *Внутренние односторонние углы* —это углы 1 и 6, углы 4 и 7.
- *Внешние односторонние углы* — это углы 2 и 5, углы 3 и 8.
- *Соответственные углы* — это углы 1 и 5, углы 2 и 6, углы 3 и 7, углы 4 и 8.

Признак и свойство параллельных прямых формулируются в терминах внутренних накрест лежащих углов.

Признак параллельности прямых. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Свойство параллельных прямых. Если две прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой возникают равные внутренние накрест лежащие углы.

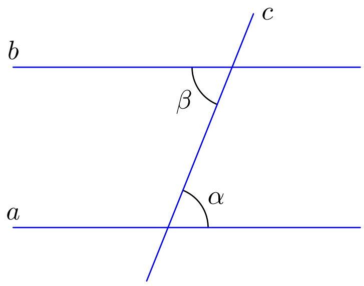

Рис. 3. $a \parallel b \ \Leftrightarrow \ \alpha = \beta$

Данная ситуация изображена на рис. 3. Одновременная справедливость признака и свойства параллельных прямых может быть записана так:

$$a \parallel b \ \Leftrightarrow \ \alpha = \beta. \tag{1}$$

В формуле (1) логическая стрелка вправо — это свойство параллельных прямых; логическая стрелка влево — это признак параллельности прямых.

Для записи «работающих в обе стороны» утверждений типа (1) используется выражение *тогда и только тогда*. Например, словесная формулировка утверждения (1) выглядит следующим образом: *две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны внутренние накрест лежащие углы (образованные при пересечении этих прямых третьей прямой)*.

Отсюда несложно доказать, что справедливы также следующие утверждения (опять-таки предполагается, что две прямые пересечены третьей):

- две прямые параллельны тогда и только тогда, когда внешние накрест лежащие углы равны;
- две прямые параллельны тогда и только тогда, когда внутренние односторонние углы в сумме дают 180°;
- две прямые параллельны тогда и только тогда, когда внешние односторонние углы в сумме дают 180°;
- две прямые параллельны тогда и только тогда, когда соответственные углы равны.

Вопрос. Верно ли утверждение: 1) точка равноудалена от концов отрезка тогда и только тогда, когда она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку; 2) внутренняя точка угла равноудалена от его сторон тогда и только тогда, когда она лежит на биссектрисе угла?

Сумма углов треугольника

Свойство параллельных прямых позволяет вычислить сумму углов треугольника.

Теорема о сумме углов треугольника. Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Через вершину C проведём прямую MN, параллельную стороне AB (рис. 4)

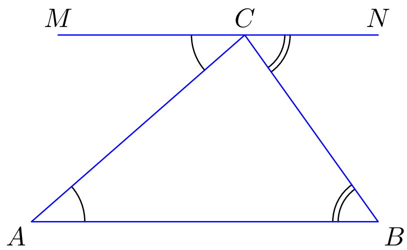

Рис. 4. Сумма углов треугольника

По свойству параллельных прямых имеем: $\angle MCA = \angle A$, $\angle NCB = \angle B$. Но углы MCA, ACB и NCB в сумме составляют развёрнутый угол. Поэтому $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с внутренним углом. Так, угол φ на рис. 5 является внешним углом треугольника ABC.

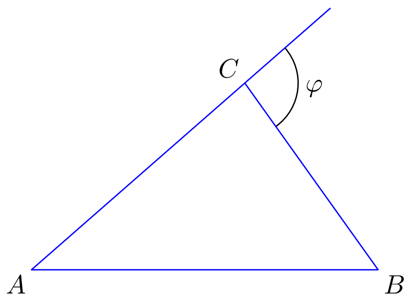

Рис. 5. Внешний угол треугольника

Теорема о внешнем угле. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Так, на рис. 5 имеем: $\varphi = \angle A + \angle B$. Теорема о внешнем угле является простым следствием теоремы о сумме углов треугольника, и вы без труда докажете её самостоятельно.

Задачи

1. Докажите, что если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

2. Отрезки AB и CD пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$.

3. Две параллельные прямые пересечены третьей. Докажите, что биссектрисы внутренних односторонних углов перпендикулярны.

4. Найдите углы треугольника, если они относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов этого треугольника.

$\boxed{40^\circ,\ 60^\circ,\ 80^\circ;\ 7 : 6 : 5}$

5. Докажите теорему о внешнем угле треугольника (*внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*)

6. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 120° и 150°. Прямая, параллельная прямой AC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите углы треугольника BMN.

$\boxed{30^\circ,\ 60^\circ,\ 90^\circ}$

7. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на данное растояние.

8. AD — биссектриса треугольника ABC. Точка M лежит на стороне AB, причём $AM = MD$. Докажите, что $MD \parallel AC$.

9. Докажите, что прямая, проходящая через середины боковых сторон равнобедренного треугольника, параллельна его основанию.

10. Прямая пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B соответственно. Биссектриса одного из образовавшихся углов с вершиной B пересекает прямую a в точке C. Докажите, что $AC = AB$.

11. Докажите, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, вдвое меньше гипотенузы.

12. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.

13. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC, причём $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный.

14. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол B вдвое больше угла A и BD — биссектриса. Докажите, что $AD = BC$.

15. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M так, что $AB = BM$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

$\boxed{20^\circ,\ 50^\circ,\ 110^\circ}$

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $MN \parallel AB$ и $MN = AM$. Найдите угол BAN, если $\angle B = 50^\circ$ и $\angle C = 60^\circ$.

$\boxed{35^\circ}$

17. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M так, что $BM = AB$. Найдите разность углов BAM и CAM, если $\angle C = 25^\circ$.

$\boxed{25^\circ}$

18. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найдите угол B.

36°

19. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

20. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из одной вершины треугольника, равен полуразности двух других его углов.

21. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $AO : OB = CO : OD = 1 : 2$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

22. BK — биссектриса треугольника ABC, причём $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC.

10°

23. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между биссектрисами двух других углов.

$90° - \alpha/2$

24. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между высотами, проведёнными из вершин двух других углов.

α или $180° - \alpha$

25. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, причём $\angle AHB = 120°$. Биссектрисы BL и CM пересекаются в точке K, причём $\angle BKC = 130°$. Найдите угол B.

40°

26. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

27. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы. Докажите, что угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

28. Гипотенуза прямоугольного треугольника с углом 30° равна 4. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, опущенная из вершины прямого угла.

1 и 3

29. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108°. Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D, пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что $DE = DB$.

30. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Биссектриса AK, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

60° и 60°

31. *Свойство прямоугольного треугольника.* Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Докажите.

32. *Признак прямоугольного треугольника.* Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный. Докажите.

33. В прямоугольном треугольнике имеется угол 30°. Докажите, что высота и медиана, проведённые к гипотенузе, делят прямой угол на три равных угла.

34. В прямоугольном треугольнике имеется угол 30°. Докажите, что отрезок перпендикуляра, проведённого к гипотенузе через её середину до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета.

35. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с углом 15°, если высота, проведённая из вершины прямого угла, равна 1.

$\boxed{4}$

36. На стороне AB квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM. Найдите угол DMC.

$\boxed{30^\circ \text{ или } 150^\circ}$

37. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC построены внешним образом равнобедренные прямоугольные треугольники ACN и BCM с прямыми углами при вершинах A и C соответственно. Докажите, что $BM \perp BN$.

38. Угол A треугольника ABC равен 40°. Биссектриса угла A и биссектриса внешнего угла при вершине C пересекаются в точке M. Найдите угол BMC.

$\boxed{70^\circ}$

39. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки). Из точек E и F на прямую AB опущены перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $EM + FN = AB$.

40. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки). Точка P — середина KD. Докажите, что $CP \perp AB$.

41. Найдите сумму внутренних углов: а) четырёхугольника; б) выпуклого пятиугольника; в) выпуклого n-угольника.

$\boxed{\text{а) } 360^\circ\text{; б) } 540^\circ\text{; в) } (n-2)\cdot 180^\circ}$

42. Внутри угла, равного 50°, взята точка M, и из неё опущены перпендикуляры MN и MP на стороны угла. Найдите угол NMP.

$\boxed{130^\circ}$

43. Вычислите сумму внешних углов выпуклого n-угольника (взятых по одному при каждой вершине).

$\boxed{360^\circ}$

44. Найдите сумму пяти углов при вершинах пятиконечной звезды (рис. 6).

180°

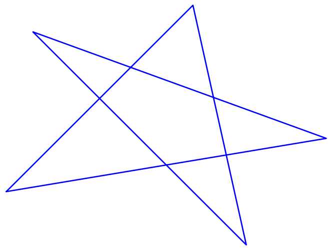

Рис. 6. К задаче 0

45. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки K и M так, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

45°

46. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M так, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle MCK$.

135°

47. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Докажите, что треугольник AKL правильный.

48. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка L делит диагональ AC в отношении $3:1$ (считая от A). Найдите угол KLD.

90°

49. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит противолежащую сторону так, что отрезок, прилежащий к вершине треугольника, равен его основанию. Докажите, что эта биссектриса также равна основанию треугольника.

50. Высота и медиана, проведённые из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.

30°, 60°, 90°

51. В треугольнике ABC биссектриса AD равна 2, $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$. Найдите $BC - AB$.

2

52. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

53. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AD = AE$, $AB = AC$ и $\angle DAC = \angle ABE + \angle AEB$. Докажите, что CD в два раза больше медианы AK треугольника ABE.

54. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

108°, 36°, 36°

55. В треугольнике ABC с углом B, равным 120°, биссектрисы AK, BL и CM пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle LMO = 30^\circ$.