Основное тригонометрическое тождество

Косинус и синус угла α, будучи соответственно абсциссой и ординатой точки тригонометрической окружности, не являются независимыми величинами. Их связывает *основное тригонометрическое тождество*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

Основное тригонометрическое тождество позволяет находить синус угла по известному косинусу или, наоборот, косинус угла по известному синусу. Для определения знака искомой тригонометрической функции требуется дополнительная информация о величине угла (например, в какой четверти расположена точка α).

Пример 1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}\,.$$

Теперь остаётся извлечь квадратный корень и поставить правильный знак у синуса. Вот для этого и дана дополнительная информация об угле.

Точка α расположена в первой четверти, так что $\sin\alpha > 0$ (рис. 1). Поэтому

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}\,.$$

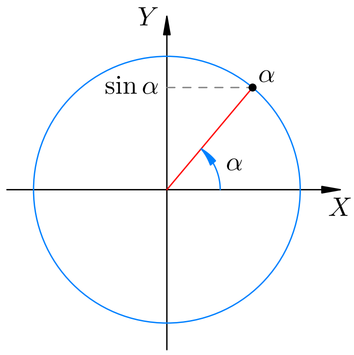

Рис. 1. $\sin\alpha > 0$

Пример 2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Действуем по той же схеме. Из основного тригонометрического тождества находим:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}\,.$$

Точка α расположена во второй четверти (рис. 2), так что $\cos\alpha < 0$. Стало быть, извлекая корень, ставим знак минус:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

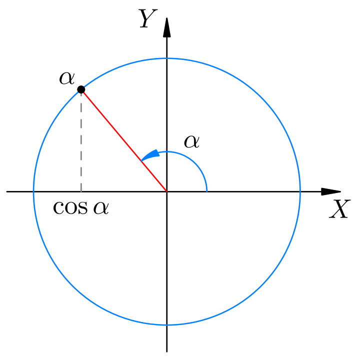

Рис. 2. $\cos\alpha < 0$

Основное тригонометрическое тождество приводит к двум формулам, связывающим соответственно косинус с тангенсом и синус с котангенсом.

1. Пусть $\alpha \neq \pi/2 + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Тогда $\cos\alpha \neq 0$. Делим обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,,$$

или

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,. \tag{2}$$

2. Пусть $\alpha \neq \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Тогда $\sin\alpha \neq 0$. Делим обе части равенства (1) на $\sin^2\alpha$:

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,,$$

или

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,. \tag{3}$$

Пример 3. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из соотношения (2) находим:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{5}\,.$$

По основному тригонометрическому тождеству получаем также:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{4}{5}\,.$$

Точка α расположена в третьей четверти (рис. 3). Синус и косинус там отрицательны, следовательно:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

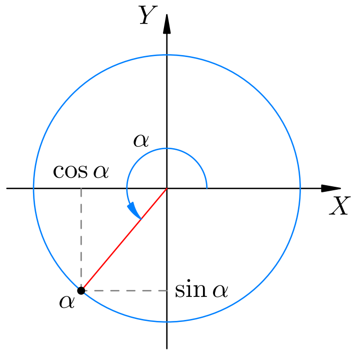

Рис. 3. $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$

Пример 4. Вычислить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Сразу же находим тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{5}{12}\,.$$

Задача свелась к предыдущей, но мы для разнообразия используем формулу (3). Имеем:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{144}{25}} = \frac{25}{169}\,.$$

Отсюда

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}\,.$$

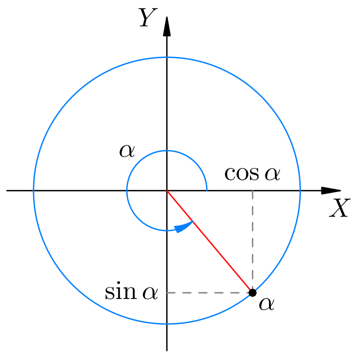

Рис. 4. $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$

По условию точка α лежит в четвёртой четверти (рис. 4), так что $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$. Следовательно,

$$\sin\alpha = -\frac{5}{13}\,, \quad \cos\alpha = \frac{12}{13}\,.$$

Задачи

1. Докажите, что для всех допустимых значениях α справедливы равенства:

а) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha$;

б) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$;

в) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)=1$;

г) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=1$;

д) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

е) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

ж) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$;

з) $\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^2+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

и) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$;

к) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{2}{\cos\alpha}$;

л) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

м) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

н) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha=1$;

о) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha=1$.

2. Известно, что $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$

3. Известно, что $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$

4. Известно, что $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$

5. Известно, что $\cos\alpha=\frac{7}{25}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

$\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$

6. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{9}{40}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$\sin\alpha=\frac{9}{41}$, $\cos\alpha=-\frac{40}{41}$

7. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha=3$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

8. Две стороны треугольника равны 2 и 3, а синус тупого угла, заключённого между этими сторонами, равен $2\sqrt{2}/3$. Найдите третью сторону треугольника.

$\sqrt{17}$

9. Найдите α, если $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

$\frac{5\pi}{6}$

10. Найдите все значения x, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$, для которых выполнено равенство $\sin x+\cos x=1$.

0, $\frac{\pi}{2}$

11. Найдите $\cos x$, если $\sin x + 3\cos x = 2$.

$\boxed{\frac{6+\sqrt{6}}{10} \text{ или } \frac{6-\sqrt{6}}{10}}$