Остатки и сравнения

Содержание

Определение. Разделить целое число a на целое число $b \neq 0$ с остатком — это значит представить число a в виде $a = kb + r$, где $0 \leqslant r < |b|$. При этом k называется частным, а r — остатком от деления a на b.

0.1. Найдите все возможные остатки от деления квадрата целого числа:
а) на 3; б) на 4; в) на 5.
Объясните, почему число $100\ldots04$ не может быть квадратом целого числа.

а) 0 и 1; б) 0 и 1; в) 0, 1 и 4.

Определение. Запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m. Читается так: a сравнимо с b по модулю m.

0.2. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.

0.3. (*Свойства сравнений*) Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Докажите, что:

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ — сравнения по одному и тому же модулю можно складывать друг с другом;
- $ac \equiv bd \pmod{m}$ — сравнения по одному и тому же модулю можно умножать друг на друга;
- $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $n \in \mathbb{N}$ — сравнение можно возвести в любую натуральную степень;
- $ka \equiv kb \pmod{m}$, $k \in \mathbb{Z}$ — сравнение можно умножить на любое целое число.

0.4. Найдите остаток от деления: а) 5^{20} на 24; б) 3^{66} на 28.

а) 1; б) 1

0.5. Докажите, что $16^{2014} + 33^{2015}$ делится на 17.

0.6. При каких натуральных n число $2^n - 1$ делится на 7?

$\boxed{\text{При } n = 3k,\ k \in \mathbb{N}}$

0.7. Докажите, что при любом натуральном n число $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7.

0.8. Докажите, что:
а) $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod 9$;
б) $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} a_1 \pmod{11}$.
Выведите отсюда признаки деления на 9 и 11.

0.9. (*Моск. матем. регата, 2012, 9*) Делится ли число $21^{10} - 1$ на 2200?

$\boxed{\text{Да}}$

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. (*Всеросс., 2015, МЭ, 10.1*) Если разделить 2014 на 105, то в частном получится 19 и в остатке тоже 19. На какие ещё натуральные числа можно разделить 2014, чтобы частное и остаток совпали? (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

1.2. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 8.7*) Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

1.3. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9.1*) Даны 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Могло ли оказаться, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?

1.4. (*Всеросс., 2002, ОЭ, 9.5*) Можно ли расставить по кругу числа $1, 2, \ldots, 60$ в таком порядке, чтобы сумма каждых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма каждых двух чисел, между которыми находятся два числа, делилась на 3, $\ldots$, сумма каждых двух чисел, между которыми находятся шесть чисел, делилась на 7?

1.5. (*Всеросс., 2008, ОЭ, 9.5*) Дано натуральное число $n > 1$. Для каждого делителя d числа $n+1$ Петя разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь — остаток. Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

1.6. (*Всеросс., 2019, РЭ, 9.3*) По кругу расставлены 100 различных натуральных чисел. Вася разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; при этом оказалось, что остатки, полученный Васей, принимают всего два различных значения. Петя разделил каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Петей, различны.

1.7. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 9.1*) По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что каждые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

1.8. (*Всеросс., 1993, ЗЭ, 9.5, 10.5*) Целые числа x, y и z таковы, что

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x + y + z.$$

Докажите, что число $x + y + z$ делится на 27.

1.9. (*Всеросс., 2011, ЗЭ, 9.5*) Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 1005$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и ещё ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

1.10. (*Всеросс., 2012, ЗЭ, 9.1*) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равняться 2012?

1.11. (*Всеросс., 2019, ЗЭ, 9.2*) При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right)$$

имеет по крайней мере один целый корень?

1.12. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 9.6, 10.6*) Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

1.13. (*Всеросс., 2002, ОЭ, 10.1*) Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разностью 2, обладающей свойством: $a_k^2 + 1$ — простое при всех $k = 1, 2, \ldots, n$?

1.14. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 10.3*) Даны натуральные числа m и n. Докажите, что число $2^n - 1$ делится на число $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m - 1)$.

1.15. (*Всеросс., 2012, ЗЭ, 10.1*) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равняться 2012?

1.16. (*Всеросс., 1999, ЗЭ, 11.1*) Существуют ли 19 попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр таких, что их сумма равна 1999?

1.17. (*Всеросс., 1994, ЗЭ, 11.5*) Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в которой a_1 не делится на 5 и для всякого n

$$a_{n+1} = a_n + b_n,$$

где b_n — последняя цифра числа a_n. Докажите, что последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

1.18. (*Всеросс., 2000, ЗЭ, 11.2*) Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке a, b, c, для которой $a + 99b = c$, нашлись два числа из одного подмножества.

1.19. (*Всеросс., 2007, ЗЭ, 10.4, 11.3*) Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры чёрным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

2 Московская математическая олимпиада

2.1. (*ММО, 2013, 8.3*) На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

2.2. (*ММО, 1999, 8.4*) Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банк разрешает совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

2.3. (*ММО, 2015, 8.4*) Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

2.4. (*ММО, 2017, 9.4*) Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1}-1$ делится на n.

2.5. (*ММО, 2017, 10.5*) При каких натуральных n для всякого натурального $k \geqslant n$ найдётся число с суммой цифр k, кратное n?

2.6. (*ММО, 2020, 9.6*) Глеб задумал натуральные числа N и a, $a < N$. Число a он написал на доске. Затем он начал выполнять следующую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число, а полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных чисел была больше $100N$?

2.7. (*ММО, 2014, 11.1*) Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a, не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, …, $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014?

2.8. (*ММО, 2019, 11.2*) На экране компьютера напечатано натуральное число, делящееся на 7, а курсор находится в промежутке между некоторыми двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что, если её впечатать в этот промежуток любое число раз, то все получившиеся числа также будут делиться на 7.

2.9. (*ММО, 2018, 11.4*) Можно ли представить число 11^{2018} в виде суммы кубов двух натуральных чисел?

2.10. (*ММО, 1996, 11.4*) Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что число n представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, а числа $n-1$ и $n+1$ — нет.

2.11. (*ММО, 1970, 10.4*) Имеется натуральное число $n > 1970$. Возьмём остатки от деления числа $2n$ на 2, 3, 4, …, n. Доказать, что сумма этих остатков больше $2n$.

2.12. (*ММО, 1993, 11.4*) В ящиках лежат камни. За один ход выбирается число k, затем камни в ящиках делятся на группы по k штук и остаток менее, чем из k штук. Оставляют по одному камню из каждой группы и весь остаток. Можно ли за пять ходов добиться, чтобы в ящиках осталось ровно по одному камню, если в каждом из них

а) не более 460 камней;

б) не более 461 камня?

2.13. (*ММО, 1994, 11.6*) Докажите, что для любого $k > 1$ найдётся такая степень двойки, что среди k последних её цифр не менее половины составляют девятки. (Например, $2^{12} = \ldots 96$, $2^{53} = \ldots 992$.)

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2019.3*) По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2016, 8–9.3, 10–11.3*) Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.2*) Найдите последнюю цифру числа $202^{303^{404}}$.

$\boxed{2}$

5.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Найдите наименьшее $n > 2016$ такое, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не кратно 10.

5.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.5, 7–8.4, 9.2*) Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

$\boxed{208}$

5.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.1*) В десятичной записи натурального числа, состоящей только из цифр 4 и 5, количество цифр 5 нечётно и на 17 больше количества цифр 4. Найдите все возможные остатки от деления этого числа на 9.

4

5.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8.2*) Агент Бонд (Джеймс Бонд) возводит число 7 в последовательные натуральные степени: $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $\ldots$

а) Верно ли, что в какой-то момент он получит число (отличное от 7), которое оканчивается на $\ldots 7$?

б) Верно ли, что рано или поздно он получит число, которое оканчивается на $\ldots 007$?

а) Да; б) да

5.6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9.2*) Натуральные числа m и n, $m \neq n$, таковы, что число 2013^m имеет такие же две последние цифры, как и 2013^n.

а) Приведите пример таких чисел m и n.

б) Выясните, какое наименьшее значение может принимать величина $m + n$.

а) 1 и 21; б) 22

5.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.5*) Прямоугольный треугольник называется пифагоровым, если длины всех его сторон — натуральные числа. Найдите наибольшее целое число, на которое делится произведение длин сторон любого пифагорова треугольника.

6 «Ломоносов»

6.1. (*«Ломоносов», 2018, 10–11.4*) Архив фотографий укладывают в порядке их нумерации в одинаковые альбомы, ровно по 4 фотографии на одну страницу. При этом 81-я по счёту фотография попала на 5-ю страницу одного из альбомов, 171-я — на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает каждый альбом?

32

6.2. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Маша задумала 12-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 11-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша.

4

6.3. (*«Ломоносов», 2014, 10–11.2*) Маша выписала на доске подряд все натуральные числа от 2 до 2015. Пришёл Ваня и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Таня и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

10070

6.4. (*«Ломоносов», 2015, 10–11.8*) Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Маши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

а) 17; б) 09 (число 100...009)

7 «Высшая проба»

7.1. (*«Высшая проба», 2016, 7.4, 8.2*) Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2 + 80xy + 95y^2$ для некоторых целых чисел x и y. Строго обоснуйте ответ.

15

7.2. (*«Высшая проба», 2013, 8.2*) Докажите, что число

$$10^{10^{10^{2013}}} + 10^{10^{2013}} + 10^{2013} - 1$$

не простое.

7.3. (*«Высшая проба», 2018, 9.5*) Чётное число $2N > 2$ называется подходящим, если оно делится на модуль разницы между наибольшим из своих чётных делителей, отличных от $2N$, и наибольшим из своих нечётных делителей. Сколько существует подходящих чётных чисел, не превосходящих 2018?

420

8 «Физтех»

8.1. (*МФТИ, 2002*) Дано число $a = 3^{2002} + 7^{2002}$. Найти последнюю цифру числа a и остаток от деления числа a на 11.

8 и 3

8.2. (*«Физтех», 2023, 11*) Найдите сумму всевозможных пятизначных чисел A таких, что сумма остатков от деления чисел $3A$, $4A$, $5A$ на некоторую степень числа 10 равна 12 364.

1490319

9 ОММО

9.1. (*ОММО, 2018.3*) Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

$a = 14$

9.2. (*ОММО, 2015.3*) Четырёхзначное число X не кратно 10. Сумма числа X и числа, полученного из X перестановкой его второй и третьей цифр, делится на 900. Найдите остаток от деления числа X на 90.

45

9.3. (*ОММО, 2015.3*) Если из четырёхзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причём K — натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число N.

2025

9.4. (*ОММО, 2010.1*) Десятичная запись натурального числа n содержит шестьдесят три цифры. Среди этих цифр есть двойки, тройки и четвёрки. Других цифр нет. Число двоек на 22 больше числа четвёрок. Найти остаток от деления n на 9.

5

9.5. (*ОММО, 2014.3*) Натуральное 61-значное число A записывается только цифрами 2, 3 и 4. При этом двоек на 19 больше, чем четвёрок. Найдите остаток от деления числа A на 9.

2

9.6. (*ОММО, 2012.3*) Найдите последнюю цифру числа $2 \cdot 7^{(2012^{2011})} + 5 \cdot 13^{(12^{11})}$.

7