

## Ортоцентр

*Ортоцентр* треугольника — это точка пересечения его высот. *Ортотреугольник* — это треугольник, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 2. Пусть  $H$  — ортоцентр остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $O$  — центр его описанной окружности. Докажите, что  $\angle ACH = \angle BCO$ .

ЗАДАЧА 3. Докажите, что ортоцентр остроугольного треугольника  $ABC$  является инцентром его ортотреугольника, а точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — центрами вневписанных окружностей ортотреугольника. Что меняется в случае тупоугольного треугольника  $ABC$ ?

ЗАДАЧА 4. (ММО, 2015, 8.5) В остроугольном треугольнике  $ABC$ , в котором  $\angle A = 45^\circ$ , проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Биссектриса угла  $BAA_1$  пересекает прямую  $B_1A_1$  в точке  $D$ , а биссектриса угла  $CAA_1$  пересекает прямую  $C_1A_1$  в точке  $E$ . Найдите угол между прямыми  $BD$  и  $CE$ .

◻9'29

ЗАДАЧА 5. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, расположена на описанной окружности этого треугольника.

ЗАДАЧА 6. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника  $ABC$  относительно середины стороны  $AB$ , лежит на описанной окружности этого треугольника и диаметрально противоположна точке  $C$ .

ЗАДАЧА 7. Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $AH = 2R|\cos A|$ , где  $R$  — радиус описанной окружности данного треугольника.

ЗАДАЧА 8. (ОММО, 2018.7) Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника  $ABC$  с описанной вокруг  $ABC$  окружностью. Окружность, вписанная в треугольник  $A_1B_1C_1$ , касается одной из сторон  $ABC$ , а один из углов треугольника  $ABC$  равен  $40^\circ$ . Найдите два других угла треугольника  $ABC$ .

◻08 и ◻09

ЗАДАЧА 9. (Турнир городов, 2016, 8–9) В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $60^\circ$ .  $H$  — точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром  $H$  и радиусом  $HC$  второй раз пересекает прямые  $CA$  и  $CB$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что  $AN$  и  $BM$  параллельны (или совпадают).

ЗАДАЧА 10. (Турнир городов, 2017, 10–11) Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведённой из прямого угла.

Задача 11. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности.

