Ориентированные углы

Ориентированные углы — мощный инструмент, дающий возможность меньше чертить, меньше думать и в то же время получать исчерпывающие доказательства. Использование ориентированных углов позволяет избежать рассмотрения различных геометрических конфигураций (например, различных случаев взаимного расположения четырёх точек на окружности); глядя на одну конфигурацию и переводя рассуждение на язык ориентированных углов, мы тем самым получаем доказательство, охватывающее и остальные случаи.

Ориентированный угол между прямыми a и b — это угол, на который нужно повернуть прямую a, чтобы она совпала с прямой b (или стала параллельна ей). Обозначение: $\angle(a, b)$. Ориентированный угол положителен, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и отрицателен в противном случае. Ориентированные углы, отличающиеся на π, считаются равными; таким образом, удобно полагать, что ориентированный угол принимает значения в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а сложение ориентированных углов производится по модулю π.

Задача 1. Покажите, что:

1) $\angle(b, a) = -\angle(a, b)$;
2) $\angle(a, b) + \angle(b, c) = \angle(a, c)$.

Задача 2. Покажите, что точки A, B, X, Y (не лежащие на одной прямой) лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(XA, XB) = \angle(YA, YB)$.

Задача 3. На окружности расположены точки A, B, C и D. Проведены хорды DX и DY, перпендикулярные прямым CB и CA соответственно. Докажите, что $AX \parallel BY$.

Указание. Используя минимум геометрических построений, с помощью формальных преобразований покажите, что $\angle(AX, BY) = 0$.

Задача 4. (*Теорема об угле между касательной и хордой в терминах ориентированных углов*) Пусть AB — хорда окружности, а прямая ℓ — касательная к окружности в точке A. Убедитесь, что для любой точки X окружности (отличной от A и B) выполнено $\angle(\ell, AB) = \angle(XA, XB)$.

Задача 5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

Задача 6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и M. Через точку K проведена касательная к окружности ω_1, пересекающая ω_2 в точке A. Прямая, проходящая через точку M параллельно KA, пересекает ω_1 и ω_2 в точках L и B соответственно. Докажите, что $KL \parallel AB$.

Задача 7. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром P пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $\angle AQD = \angle BQC$.

Задача 8. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены треугольники ABC', $AB'C$ и $A'BC$, причём сумма углов при вершинах A', B' и C' кратна $180°$. Докажите, что описанные окружности построенных треугольников пересекаются в одной точке.

Задача 9. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) В треугольнике ABC медианы AM_A, BM_B и CM_C пересекаются в точке M. Построим окружность Ω_A, проходящую через середину отрезка AM и касающуюся отрезка BC в точке M_A. Аналогично строятся окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку.