Описанная сфера

1. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром 1.

$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$

2. (*МФТИ, 2002.6*) Расстояние от центра O шара радиуса 12, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до бокового ребра равно $4\sqrt{2}$. Найти:

1. высоту пирамиды;
2. расстояние от точки O до боковой грани пирамиды;
3. радиус вписанного в пирамиду шара.

$\boxed{1)\ \frac{56}{3};\ 2)\ 3\sqrt{2};\ 3)\ \frac{8}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$

3. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 8, 10. Все боковые рёбра равны $5\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

$\boxed{5}$

4. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной 3. Одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

$\boxed{2}$

5. (*«Физтех», 2012.6*) На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:
а) отношение объёма пирамиды QAA_1C_1C к объёму призмы;
б) длину отрезка QB;
в) объём призмы.

$\boxed{а)\ 2:3;\ б)\ 2\sqrt{3};\ в)\ \frac{81}{16}}$

6. (*МФТИ, 2008.6*) Грани ABC и ABD пирамиды $ABCD$ ортогональны и являются равными равнобедренными треугольниками с общим основанием AB. Известно, что $AB = 1$, $CD = 2$. Найти угол между прямыми AC и BD, расстояние между прямыми AC и BD и радиус сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$.

$\boxed{1)\ \arccos\frac{1}{9};\ 2)\ \frac{2}{\sqrt{5}};\ 3)\ \frac{\sqrt{65}}{8}}$

7. (*МФТИ, 1999.6*) Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$, точка F — центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F.

$\boxed{\arccos\frac{7}{2\sqrt{19}},\ \frac{a\sqrt{6}}{9},\ a\sqrt{\frac{11}{6}}}$

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011.3*) В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объём которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

$\boxed{24}$

9. Рёбра тетраэдра равны 1, 3, 3, 4, 4, 5. Найдите радиус его описанной сферы.

$\boxed{\frac{5}{2}}$

10. (*ОММО, 2020.8*) Про тетраэдр $PQRS$ известно, что $PQ = 4$, $SR = 6$, $\angle QRS = \angle PSR = 50^\circ$, $\angle QSR = \angle PRS = 40^\circ$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек P, Q, R, S не меньше 6π. Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

$\boxed{18\pi}$

11. (*«Ломоносов», 2006.8*) В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n есть центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

$\boxed{2}$

12. (*МГУ, мехмат, 2003-05.5*) Пирамида $SABCD$ с боковыми ребрами $AS = BS = = CS = 2$ вписана в сферу радиуса $\frac{5}{3}$. Линия пересечения плоскостей ASD и BSC касается сферы. Найти объем пирамиды, если $AB = BC = \frac{8}{5}$.

$\boxed{\frac{96\sqrt{3}}{125}}$

13. (*МГУ, мехмат, 1999-03.6*) Основание H высоты SH треугольной пирамиды $SABC$ принадлежит грани ABC, $SH = \sqrt{\frac{5}{21}}$, $SA = 1$, $SB = 2$, $\angle ASB = 120^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

$\boxed{\frac{\sqrt{21}}{2}}$

14. (*«Курчатов», 2018, 11.6*) Тетраэдр $ABCD$ с остроугольными гранями вписан в сферу с центром O. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости ABC, пересекает сферу в точке E такой, что D и E лежат по разные стороны относительно плоскости ABC. Прямая DE пересекает плоскость ABC в точке F, лежащей внутри треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ADE = \angle BDE$, $AF \neq BF$ и $\angle AFB = 80^\circ$. Найдите величину $\angle ACB$.

$\boxed{40^\circ}$

15. (*«Курчатов», 2019, 11.6*) В тетраэдре $ABCD$ выполнены равенства:

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD, \quad \angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$

Докажите, что центр описанной сферы тетраэдра лежит на прямой, соединяющей середины ребер AB и CD.

16. (*Турнир городов, 1997, 10–11*) Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные пирамиды $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$, $BCDA'$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD'.

17. (*Турнир городов, 2003, 10–11*) Дана треугольная пирамида $ABCD$. В ней R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы, a — длина наибольшего ребра, h — длина наименьшей высоты (на какую-то грань). Докажите, что $R/r > a/h$.

18. (*Всеросс. по геометрии, 2015, 10*) Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Из вершин A, B, C, D опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA, SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

19. (*Всеросс., 2014, финал, 11*) Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает рёбра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости (ABC). Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин рёбер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

20. (*Всеросс., 1999, финал, 11*) Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, касательная к описанной около него сфере. Докажите, что линии пересечения этой плоскости с плоскостями граней ABC, ACD и ABD образуют шесть равных углов тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

21. (*Всеросс., 2006, финал, 11*) Окружность с центром I, вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB, BC, CA в точках D, E, F соответственно. На отрезках SA, SB, SC отмечены соответственно точки A', B', C' так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; S' — точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S. Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A', B', C'.

22. (*Всеросс., 2001, финал, 11*) Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает рёбра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

23. (*Всеросс., 2009, финал, 11*) В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC, AD.

24. (*Турнир городов, 2009, 10–11*) Три плоскости разрезают параллелепипед на 8 шестигранников, все грани которых — четырёхугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.

25. (*Турнир городов, 2005, 10–11*) Икосаэдр и додекаэдр вписаны в одну и ту же сферу. Докажите, что тогда они описаны вокруг одной и той же сферы.