

Окружность девяти точек и прямая Эйлера

В треугольнике ABC обозначим:

M_A, M_B, M_C — середины сторон BC, AC, AB соответственно;

AH_A, BH_B, CH_C — высоты, H — ортоцентр;

T_A, T_B, T_C — середины отрезков AH, BH, CH соответственно;

ТЕОРЕМА. (*Окружность девяти точек*) Точки $M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C, T_A, T_B, T_C$ лежат на одной окружности.

Первое доказательство теоремы

ЗАДАЧА 1. Докажите, что $\triangle M_A M_B M_C = \triangle T_A T_B T_C$.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что $M_A M_B T_A T_B, M_B M_C T_B T_C$ и $M_C M_A T_C T_A$ — прямоугольники.

ЗАДАЧА 3. Докажите, что точки $M_A, M_B, M_C, T_A, T_B, T_C$ лежат на одной окружности.

ЗАДАЧА 4. Докажите ТЕОРЕМУ.

ЗАДАЧА 5. («Высшая проба», 2013, 9) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 . На стороне AB выбрана точка P так, что окружность, описанная вокруг треугольника PA_1B_1 , касается стороны AB . Найдите PC_1 , если $PA = 30$ и $PB = 10$.

9

Второе доказательство теоремы (лемма о трезубце)

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и окружность ω , описанную вокруг его орторегулярного треугольника.

ЗАДАЧА 6. С помощью леммы о трезубце докажите, что точки T_A, T_B, T_C расположены на окружности ω .

ЗАДАЧА 7. С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что точки M_A, M_B, M_C расположены на окружности ω .

ЗАДАЧА 8. Проведите аналогичные рассуждения для тупоугольного треугольника ABC .

Прямая Эйлера

ЗАДАЧА 9. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что

$$AH = 2 \cdot OM_A, \quad BH = 2 \cdot OM_B, \quad CH = 2 \cdot OM_C.$$

Указание. Рассмотрите треугольник, для которого $\triangle ABC$ является *серединным*.

ЗАДАЧА 10. Пусть X — точка пересечения AM_A и OH . Покажите, что X совпадает с центроидом (точкой пересечения медиан) треугольника ABC .

Таким образом, ортоцентр, центр описанной окружности и центроид треугольника лежат на одной прямой. Эта прямая называется прямой Эйлера.

ЗАДАЧА 11. Покажите, что центр окружности девяти точек является серединой отрезка OH .

Теперь нетрудно заключить, что окружность девяти точек данного треугольника переходит в описанную окружность этого треугольника:

- при гомотетии относительно центроида с коэффициентом -2 ;
- при гомотетии относительно ортоцентра коэффициентом 2 .

Эти факты полезно иметь в виду при решении задач.

ЗАДАЧА 12. (Всеросс., 2015, финал, 9) Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность Ω . Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A' . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB .

ЗАДАЧА 13. (МГУ, мехмат, 2004-07.6) В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H , а медианы в точке O . Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH . Найти площадь треугольника ABC , если $BC = 2$, а разность углов B и C равна 30°

$$\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$