Числовые таблицы

1. (*Всеросс., 2019, МЭ, 8.1*) Можно ли расставить натуральные числа в клетки таблицы размером 7×7 так, чтобы в любом квадрате 2×2 и любом квадрате 3×3 сумма чисел была нечетна?

2. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9.3*) Можно ли в некоторые клетки таблицы 8×8 написать единицы, а в остальные — нули, так, чтобы во всех столбцах была разная сумма, а во всех строчках — одинаковая?

3. (*Турнир городов, 2015, 8–9.1*) Дана квадратная таблица. В каждой её клетке стоит либо плюс, либо минус, причём всего плюсов и минусов поровну. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов.

4. (*Всеросс., 2016, МЭ, 8.6*) В каждой клетке таблицы размером 13×13 записано одно из натуральных чисел от 1 до 25. Клетку назовём «хорошей», если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться «хорошими»?

5. (*«Высшая проба», 2020, 9.1, 10.1*) В таблице 9×9 расставлены различные натуральные числа, сумма которых равна $2S$. Известно, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в каждом столбце — снизу вверх. Может ли сумма чисел в центральном квадрате 5×5 быть больше S?

6. (*«Курчатов», 2018, 9.5, 10.4*) Натуральные числа $1, 2, \ldots, 64$ записаны в клетках таблицы 8×8 так, что для всех $k = 1, 2, 3, \ldots, 63$ числа k и $k + 1$ находятся в соседних по стороне клетках. Каково максимальное значение возможной суммы чисел на главной диагонали?

7. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.2*) Вася вписал в клетки таблицы 4×18 натуральные числа от 1 до 72 в некотором одному ему известном порядке. Затем для каждого из восемнадцати столбцов он перемножил стоящие в нём четыре числа и вычислил сумму цифр полученного произведения. Могли ли все восемнадцать сумм оказаться одинаковыми?

8. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2016.2*) В каждой клетке таблицы 100×100 записано одно из чисел 1 или -1. Могло ли оказаться, что ровно в 99 строках суммы чисел отрицательны, а ровно в 99 столбцах — положительны?

9. (*ММО, 2012, 8.6*) В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа. Оказалось, что в каждой клетке записано количество соседних с ней по стороне клеток, в которых стоит единица. При этом не все числа — нули. При каких числах m и n, больших 100, такое возможно?

10. (*ММО, 2011, 8.6*) В каждой клетке квадратной таблицы написано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна b. Докажите, что $a = b$.

11. (*ММО, 2019, 8.6*) В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

12. (*Турнир городов, 2017, 8–9.7*) а) Группа людей прошла опрос, состоящий из 20 вопросов, на каждый из которых возможно два ответа. После опроса оказалось, что для любых 10 вопросов и любой комбинации ответов на эти вопросы существует человек, давший именно эти ответы на эти вопросы. Обязательно ли найдутся два человека, у которых ответы ни на один вопрос не совпали?

б) Решите ту же задачу, если на каждый вопрос есть 12 вариантов ответа.

13. (*Турнир городов, 2015, 8–9.5*) а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

б) В таблицу 10×10 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

б) (*10–11*) В таблицу 100×100 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

14. (*Турнир городов, 2017, 10–11.3*) В каждую клетку квадрата 1000×1000 вписано число так, что в любом не выходящем за пределы квадрата прямоугольнике площади s со сторонами, проходящими по границам клеток, сумма чисел одна и та же. При каких s числа во всех клетках обязательно будут одинаковы?

15. (*Всеросс., 2019, РЭ, 10.3*) Клетки таблицы 2×2019 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2019 действительных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней строке должны стоять те же 2019 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2019 столбцов должны быть записаны два разных числа, причём сумма этих двух чисел должна быть рациональным числом. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы?

16. (*Всеросс., 2018, РЭ, 11.2*) В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы?

17. (*Всеросс., 2018, ЗЭ, 10.5*) В таблицу 10×10 записаны положительные числа так, что в любой строке числа образуют арифметическую прогрессию (в порядке следования слева направо), а в любом столбце — геометрическую прогрессию (в порядке следования сверху вниз). Докажите, что знаменатели всех этих геометрических прогрессий равны.

18. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11.3*) Все клетки квадратной таблицы $n\times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2. Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a. Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

19. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 10.4*) В каждой клетке квадратной таблицы размером $n \times n$ клеток ($n \geqslant 3$) записано число 1 или -1. Если взять любые две строки, перемножить числа, стоящие в них друг над другом и сложить n получившихся произведений, то сумма будет равна 0. Докажите, что число n делится на 4.

20. (*ММО, 2015, 11.5*) Докажите, что в таблице 8×8 нельзя расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое по одному разу) так, чтобы в ней для любого квадрата 2×2 вида

a	b
c	d

было выполнено равенство $|ad-bc|=1$.

21. (*«Курчатов», 2019, 10.5*) В каждой клетке квадратной таблицы размером 200×200 написали по действительному числу, по модулю не превосходящему 1. Оказалось, что сумма всех чисел равна нулю. Для какого наименьшего S можно утверждать, что в какой-то строке или каком-то столбце сумма чисел заведомо окажется по модулю не превышающей S?

22. (*«Ломоносов», 2014, 10–11.8*) Прямоугольная таблица состоит из 5681 одинаковых клеток. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, …, 5681 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася — по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

450

23. (*«Высшая проба», 2016, 10.6*) Таблица $n\times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ — количество таких расстановок. Например, $f(1)=10$, $f(11)=0$.

а) Что больше: $f(9)$ или $f(10)$?

б) Что больше: $f(5)$ или $f(6)$?

24. (*«Высшая проба», 2016, 11.6*) Таблица $n\times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ — количество таких расстановок. Например, $f(1)=2016$, $f(2017)=0$.

а) Что больше: $f(2015)$ или $f(2016)$?

б) Что больше: $f(1008)$ или $f(1009)$?

25. (*ММО, 2017, 11.5*) Таблица размером 2017×2017 заполнена ненулевыми цифрами. Среди 4034 чисел, десятичные записи которых совпадают со строками и столбцами этой таблицы, читаемыми слева направо и сверху вниз соответственно, все, кроме одного, делятся на простое число p, а оставшееся число на p не делится. Найдите все возможные значения p.