Числовые неравенства

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 7–8.4*) Сравните числа $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023}$ и $\frac{5}{16}$.

2. (*«Бельчонок», 2020, 8.1*) Для положительных действительных чисел x, y сравните значения выражений $\frac{x}{x^3+xy+1}$ и $\frac{1}{x+y+1}$.

3. (*ОММО, 2019.1*) Что больше: 1 или $\frac{21}{64} + \frac{51}{154} + \frac{71}{214}$?

$\boxed{1}$

4. (*«Ломоносов», 2018, 10–11.1*) На каком из пяти интервалов, на которые разбивают числовую ось четыре точки

$$x^5 < y^8 < y^3 < x^6,$$

лежит число 0?

$\boxed{(x^5, y^8)}$

5. (*Моск. матем. регата, 2011, 9*) Найдите наибольшее натуральное n, при котором $n^{200} < 5^{300}$.

$\boxed{11}$

6. (*Всеросс., 2017, МЭ, 9.4*) Что больше:

$$\sqrt{2016} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}} \quad \text{или} \quad \sqrt{2015} + \sqrt{2016 + \sqrt{2015}}\ ?$$

Первое число больше

7. (*ММО, 2011, 9.1*) Что больше: $2011^{2011} + 2009^{2009}$ или $2011^{2009} + 2009^{2011}$?

Первое число больше

8. (*«Ломоносов», 2018, 10–11.2*) Какое из чисел больше:

$$\underbrace{\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\ldots}}}}}}_{\text{2018 знаков корня}} \quad \text{или} \quad 17\sqrt[3]{\frac{13}{17}}\ ?$$

Второе

9. (*ММО, 2010, 11.1*) Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{a + \frac{2010}{b + \frac{1}{c}}},$$

где a, b, c — попарно различные ненулевые цифры?

$\boxed{\frac{1}{203}}$

10. (*Всеросс., 2017, ЗЭ, 10.4, 11.3*) На доске выписаны в ряд n положительных чисел a_1, a_2, …, a_n. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел b_1, b_2, …, b_n отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$.

Сравнение чисел на ММО-2013

Данный фрагмент посвящён следующей задаче.

11. (*ММО, 2013, 11.3*) Сравните числа

$$\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Мы рассмотрим два способа её решения.

Первый способ

12. Пусть

$$A = \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\,.$$

Покажите, что

$$A = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$$

и что $A > \frac{2}{3}$.

13. Пусть

$$P = \left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right).$$

Сравните P^2 и $\frac{3}{2}$. Закончите задачу 11.

Подсказка 1

Второй способ

14. Покажите, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

15. Покажите, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\,.$$

Убедитесь, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} < \frac{1}{4}\,.$$

16. Покажите, что $\ln(1+x) < x$ при $x \neq 0$. Используя данное неравенство и результат предыдущей задачи, сравните числа $\ln P$ и $\frac{1}{6}$. Закончите задачу 11.

Подсказка 2

Подсказка 1

$$\left(1+\frac{2}{3^3}\right)^2 < \left(1+\frac{2}{2^3}\right)\left(1+\frac{2}{3^3}\right)$$

Подсказка 2

$$\frac{2}{3^3} < \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$