НОД и НОК

Определение. **Наибольший общий делитель** чисел a и b — это самое большое число, на которое одновременно делятся a и b. Оно обозначается НОД(a, b).

Определение. **Наименьшее общее кратное** чисел a и b — это наименьшее число, которое одновременно делится на a и на b. Оно обозначается НОК(a, b).

Для небольших чисел вам много раз приходилось интуитивно искать НОК — вспомните приведение дробей к общему знаменателю! Пусть, например, нужно сложить $1/6$ и $1/9$. Можно, конечно, поступить формально и привести их к общему знаменателю $6 \cdot 9 = 54$, но лучше всё же сообразить, что общим знаменателем является 18. Ведь 18 — наименьшее число, делящееся одновременно на 6 и 9: НОК$(6, 9) = 18$. Итак,

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{3}{18} + \frac{2}{18} = \frac{5}{18}\,.$$

Мы видим, таким образом, что «самый хороший» общий знаменатель двух дробей — это НОК их знаменателей!

Найти НОД для небольших чисел также не составляет труда — достаточно просто перебрать все их общие делители. Очевидно, например, что НОД$(6, 9) = 3$, НОД$(18, 24) = 6$. Ну а как найти НОД и НОК, скажем, чисел 120 и 252? Здесь снова приходит на помощь каноническое разложение.

Имеем:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

(найдите эти разложения самостоятельно!). В данных разложениях фигурируют простые множители 2, 3, 5, 7 — каждый в своей степени. Вот из этих сомножителей и будут конструироваться искомые НОД и НОК.

Какие из них войдут в НОД? Поскольку НОД — *общий* делитель, в него войдут только те множители, которые входят в оба разложения *одновременно*, а именно 2 и 3. В самом деле, 7 не может войти в НОД, так как 120 не делится на 7 (ведь 7 не входит в каноническое разложение числа 120); аналогично и 5 не может войти в НОД, так как 252 не делится на 5. А в каких степенях будут входить в НОД множители 2 и 3? Поскольку НОД — *наибольший* общий делитель, эти степени должны быть *максимально возможными*. Видим, что 2^2 ещё может войти в НОД (оба числа делятся на 2^2), а 2^3 — уже нет (252 не делится на 2^3). Аналогично, 3 ещё может войти в НОД (оба числа делятся на 3), а 3^2 — уже нет (120 не делится на 3^2). Итак,

$$\text{НОД}(120, 252) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

А какие из множителей 2, 3, 5, 7 войдут в НОК? НОК делится и на 120, и на 252, поэтому НОК обязано делиться и на каждый множитель чисел 120 и 252. Это означает, что каждый из множителей 2, 3, 5, 7 войдет в НОК. В каких степенях? Поскольку НОК — *наименьшее* общее кратное, эти степени должны быть *минимально возможными*. Видим, что 2^3 ещё может войти в НОК (только в этом случае НОК разделится и на 120, и на 252), а 2^2 — уже нет (потому что тогда НОК не разделится на 120). Аналогично, 3^2 ещё может войти в НОК (снова только в этом случае НОК разделится и на 120, и на 252), а просто 3 — уже нет (потому что тогда НОК не разделится на 252). По тем же соображениям в НОК должны войти множители 5 и 7, так что

$$\text{НОД}(120, 252) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Совершенно аналогично отыскиваются НОД и НОК трёх и более чисел.

Задачи

1. Найдите НОД чисел: а) 72 и 108; б) 168 и 180; в) 360 и 1050; г) 270, 450 и 555.

а) 36; б) 12; в) 30; г) 15

2. Найдите НОК чисел: а) 15 и 18; б) 36 и 48; в) 252 и 360; г) 72, 120 и 264.

а) 90; б) 144; в) 2520; г) 3960

3. У Деда Мороза 525 мандаринов и 735 конфет. Нужно составить из них одинаковые наборы, причем так, чтобы раздать их наибольшему количеству детей. Сколько мандаринов и сколько конфет должно быть тогда в наборе? Сколько детей получат подарки?

5 мандаринов и 7 конфет; 105 детей

4. Длина шага Вани равна 75 см, Тани — 60 см, а их папы — 1 м 05 см. Гуляя, все трое сделали целое число шагов. Какое наименьшее расстояние они могли пройти?

21 м

5. Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты и каждый пятый день ходит на охоту. Первого января у Робинзона наступил *тяжёлый* день: он должен сделать все эти три дела. Какого числа у Робинзона наступит следующий *тяжёлый* день?

31 января

6. Какая из дробей больше: 23/135 или 31/180? На сколько?

Вторая дробь больше на 1/540

7. Числа называются **взаимно простыми**, если их НОД равен единице (иными словами, если у них нет общих делителей, отличных от единицы).

Покажите, что числа 175 и 198 являются взаимно простыми. Придумайте три пары взаимно простых чисел и найди их НОК. Вообще, чему равно НОК(a, b) для взаимно простых чисел a и b? Почему?

Если a и b взаимно просты, то НОК$(a, b) = ab$

8. Сравните:

а) НОД$(18, 24) \cdot$ НОК$(18, 24)$ и $18 \cdot 24$;

б) НОД$(96, 112) \cdot$ НОК$(96, 112)$ и $96 \cdot 112$.

Вообще, чему равно произведение НОД$(a, b) \cdot$ НОК(a, b)?

НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = ab$. Почему?

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6, №2; 7–8, №1*) Найдите наименьшее натуральное N такое, что N делится (без остатка) на 12, $N + 2$ — на 14, $N + 4$ — на 16, а $N + 6$ — на 18.

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6, №2; 7–9, №1*) Найдите наименьшее натуральное N такое, что $N + 2$ делится (без остатка) на 2, $N + 3$ — на 3, …, $N + 10$ — на 10.

2520

11. (*«Физтех», 2014, 7*) Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел $11n + 5$ и $19n + 2$, если n — натуральное число?

$\boxed{73}$

12. (*Московская устная олимпиада, 2003, 7.3*) На каждом километре между сёлами Марьино и Рощино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Марьино, на другой — расстояние до Рощино. Гуляя по этой дороге, Бобик для каждой таблички подсчитал наибольший общий делитель записанных на ней чисел. Оказалось, что среди полученных им чисел встретились только 1, 3 или 5 (каждое хотя бы по одному разу). Найдите расстояние между сёлами.

13. (*Московская устная олимпиада, 2012, 7.4*) Назовём натуральные числа a и b *друзьями*, если их произведение является точным квадратом. Докажите, что если a — друг b, то a — друг НОД(a, b).