НОД и НОК

Содержание

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике . . . 1
2 Московская математическая олимпиада . . . 4
3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера . . . 5
4 Турнир городов . . . 5
5 «Покори Воробьёвы горы!» . . . 5
6 «Ломоносов» . . . 6
7 «Высшая проба» . . . 6
8 «Физтех» . . . 6
9 «Росатом» . . . 7
10 Свойство Лукача . . . 7

Понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного содержатся в листке «НОД и НОК» для 5–7 классов.

0.1. Пусть a и b — фиксированные целые числа. Рассмотрим множество S чисел вида $ax + by$ со всевозможными целыми x и y. Докажите, что:

а) $a, b \in S$;
б) если $m \in S$ и $n \in S$, то $m \pm n \in S$;
в) если $k \in \mathbb{Z}$ и $m \in S$, то $km \in S$;
г) если $m, n \in S$ и $n > 0$, то остаток от деления m на n принадлежит S;
д) если c — общий делитель чисел a и b, то все числа из S делятся на c;
е) если d — наименьшее положительное число в S, то все числа из S делятся на d.

0.2. Докажите, что число d из предыдущей задачи есть наибольший общий делитель чисел a и b.

0.3. Что представляет собой множество S из задачи 0.1, если числа a и b взаимно просты?

$\boxed{\mathbb{Z} = S}$

0.4. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a, a - b)$ для любых целых a и b.

0.5. Докажите, что при любом натуральном n числа $21n + 4$ и $14n + 3$ взаимно простые.

0.6. Для любых натуральных a, x, y докажите, что НОК$(ax, ay) = a \cdot$ НОК(x, y).

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 8.1*) Робинзон Крузо каждый второй день пополняет запасы питьевой воды из источника, каждый третий день собирает фрукты и каждый пятый день ходит на охоту. Сегодня, 13 сентября, у Робинзона тяжёлый день: он должен делать все эти три дела. Когда у Робинзона будет следующий тяжёлый день?

1.2. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 8.2*) В мешке у Деда Мороза находятся меньше ста подарков для Пети, Вася, Бори и Лёши. Дед Мороз отдал половину подарков Пете, пятую часть — Васе, седьмую часть — Боре. Сколько подарков досталось Лёше?

1.3. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 9.5*) Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, b) + 19$$

(и докажите, что других нет).

1.4. (*Всеросс., 2019, МЭ, 9.1*) Отец и сын несут одинаковые банки консервов. Масса каждой банки выражается целым числом граммов, не меньшим чем 300, но не большим чем 400. Отец несёт 6 кг 500 г, а сын — 2 кг 600 г. Сколько банок у отца и сколько у сына?

1.5. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 8.6*) Для некоторых натуральных чисел a, b, c и d выполняются равенства

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1}.$$

Докажите, что $a = c$ и $b = d$.

1.6. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9.3*) Учитель записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N?

1.7. (*Всеросс., 2016, РЭ, 9.3*) Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

1.8. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 9.3*) Пусть a, b и c — попарно взаимно простые натуральные числа. Найдите все возможные значения $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число целое.

1.9. (*Всеросс., 2009, ЗЭ, 9.1*) Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

1.10. (*Всеросс., 2016, РЭ, 10.2*) Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

1.11. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 9.4, 10.3*) Три натуральных числа таковы, что произведение каждых двух из них делится на сумму этих двух чисел. Докажите, что эти три числа имеют общий делитель, больший единицы.

1.12. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 10.2*) Натуральные числа m и n таковы, что

$$\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n.$$

Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

1.13. (*Всеросс., 2013, РЭ, 10.6*) Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a + c$, $b + c$ — составное.

1.14. (*Всеросс., 1994, ЗЭ, 10.5*) Докажите, что для натуральных чисел k, m и n справедливо неравенство

$$[k, m] \cdot [m, n] \cdot [n, k] \geqslant [k, m, n]^2$$

(здесь через $[x, y, \ldots]$ обозначено наименьшее общее кратное чисел x, y, $\ldots$).

1.15. (*Всеросс., 2006, ЗЭ, 9.5, 10.5*) Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_{10} — натуральные числа,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}.$$

Пусть b_k — наибольший делитель a_k, меньший a_k. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

1.16. (*Всеросс., 2000, ЗЭ, 9.2*) Таня задумала натуральное число $X \leqslant 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N, меньших 100, и задаёт вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X + M$ и N?» Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав семь таких вопросов.

1.17. (*Всеросс., 2016, ЗЭ, 9.3*) Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s - 1$ чисел оказалась равной $N - 2$. Какие значения могло принимать N?

1.18. (*Всеросс., 2013, ЗЭ, 9.3*) На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди b_1, b_2, $\ldots$, b_{100}?

1.19. (*Всеросс., 2015, ЗЭ, 10.5*) Известно, что клетчатый квадрат можно разрезать на n одинаковых фигурок из k клеток. Докажите, что его можно разрезать и на k одинаковых фигурок из n клеток.

1.20. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10.7*) По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

1.21. (*Всеросс., 1996, ЗЭ, 10.5*) В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах?

1.22. (*Всеросс., 1995, ЗЭ, 10.5*) Последовательность натуральных чисел a_i такова, что

$$\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$$

для всех $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

1.23. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 9.7*) Докажите, что из любых шести четырёхзначных чисел, взаимно простых в совокупности, всегда можно выбрать пять чисел, также взаимно простых в совокупности.

1.24. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 10.7*) Докажите, что из произвольного множества трёхзначных чисел, включающего не менее четырёх чисел, взаимно простых в совокупности, можно выбрать четыре числа, также взаимно простых в совокупности.

1.25. (*Всеросс., 2010, РЭ, 11.4*) Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) квадратной, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число. (Тройка (c, b, a) новой тройкой не считается.)

1.26. (*Всеросс., 2006, ЗЭ, 10.2*) Сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трёх чисел делится на 4.

1.27. (*Всеросс., 1997, ЗЭ, 10.7*) Найдите все такие тройки натуральных чисел m, n и l, что

$$m + n = (\text{НОД}(m, n))^2, \quad m + l = (\text{НОД}(m, l))^2, \quad n + l = (\text{НОД}(n, l))^2.$$

1.28. (*Всеросс., 2000, ЗЭ, 9.8*) По окружности расставлено 100 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавлять к любому числу наибольший общий делитель его соседей. Докажите, что при помощи таких операций можно сделать все числа попарно взаимно простыми.

1.29. (*Всеросс., 2005, ЗЭ, 11.4*) Натуральные числа x, y, z ($x > 2$, $y > 1$) таковы, что $x^y + 1 = z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x, через q — количество различных простых делителей числа y. Докажите, что $p \geqslant q + 2$.

2 Московская математическая олимпиада

2.1. (*ММО, 2000, 11.1*) Наибольший общий делитель натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение $\text{НОД}(m + 2000n, n + 2000m)$?

2.2. (*ММО, 1999, 10.3*) Найдите все такие пары натуральных чисел x, y, что числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$.

2.3. (*ММО, 2005, 9.5*) На окружности расставлено n цифр, отличных от 0. Сеня и Женя переписали себе в тетрадки $n - 1$ цифру, читая их по часовой стрелке. Оказалось, что хотя они начали с разных мест, записанные ими $(n - 1)$-значные числа совпали. Докажите, что окружность можно разрезать на несколько дуг так, чтобы записанные на дугах цифры образовывали одинаковые числа.

2.4. (*ММО, 2014, 9.5*) *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например,

$$\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

2.5. (*ММО, 2018, 9.5, 10.4*) Назовем расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n, m существует *хорошая* расстановка?

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2009.5*) Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*, *, *) - \text{НОК}(*, *, *) = 2009$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

3.2. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2014.3*) Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N?

3.3. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2016.4*) Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2015, 8–9.2, 10–11.1*) Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

а) ровно в шесть раз;

б) ровно в пять раз?

4.2. (*Турнир городов, 2015, 10–11.5*) По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы каждые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N, на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.

5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.2, 7–9.1*) Найдите наименьшее натуральное N такое, что $N + 2$ делится (без остатка) на 2, $N + 3$ — на 3, ..., $N + 10$ — на 10.

5.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11*) Пусть $\frac{m}{n}$ — положительная несократимая дробь, и известно, что дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сократима?

6 «Ломоносов»

6.1. (*«Ломоносов», 2014, 8–9*) Найдите все пары натуральных m, n, таких, что НОД$(m,n) = 2015!$, а НОК$(m,n) = 2016!$. (Пары (m,n) и (n,m) считаются как одна пара.)

6.2. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Среди чисел, превышающих 2013, найдите наименьшее нечётное число N, при котором дробь $\frac{13N-10}{19N-9}$ сократима.

6.3. (*«Ломоносов», 2007.6*) Натуральные числа a, b и c таковы, что

$$\text{НОК}(a,b) = 60 \quad \text{и} \quad \text{НОК}(a,c) = 270.$$

Найдите НОК(b,c).

6.4. (*«Ломоносов», 2009.5*) Какие значения может принимать наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

7 «Высшая проба»

7.1. (*«Высшая проба», 2016, 10.5, 11.4*) Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады «Высшая проба» по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c и вычислил $x = $ = НОД(a,b), $y = $ НОД(b,c), $z = $ НОД(c,a). Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

8 «Физтех»

8.1. (*«Физтех», 2015, 8–9*) На доске написаны числа $2^{17}3^{2}5^{12}7^{3}$ и $2^{2}3^{22}5^{2}7^{15}$. За одну операцию разрешается написать на доску ещё одно натуральное число — разность каких-то двух написанных на доске. При этом запрещается записывать такие числа, которые уже есть на доске. Найдите сумму двух наименьших чисел, которые могут получиться на доске в результате применения таких операций.

8.2. (*«Физтех», 2014, 7–10*) Какое наибольшее значение может быть у наибольшего общего делителя чисел $11n+6$ и $23n+5$, если n — натуральное число?

8.3. (*«Физтех», 2023, 8*) Известно, что число $7x+27y$ делится без остатка на число 42. Сколько различных остатков может давать число $5x+21y$ при делении на число 42, если известно, что x и y — целые?

8.4. (*«Физтех», 2013, 8, 11*) Натуральные числа m и n удовлетворяют условию $\text{НОД}(m,n)=1$. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(20m+n, 30n+m)$?

8.5. (*«Физтех», 2023, 8*) За круглый стол сели 246 магистров двух орденов: ордена Лжецов (они всегда лгут) и ордена Рыцарей (они всегда говорят правду). Хотя бы по одному магистру из каждого ордена есть. Какое наибольшее число из сидящих за столом могло сказать: «Через 16 человек от меня есть магистр из ордена Рыцарей»?

8.6. (*«Физтех», 2023, 9*) За круглый стол сели 165 магистров двух орденов: ордена Лжецов (они всегда лгут) и ордена Рыцарей (они всегда говорят правду). Хотя бы по одному магистру из каждого ордена есть. Какое наибольшее число из сидящих за столом могло сказать: «Через 5 человек от меня есть магистр из ордена Рыцарей»?

8.7. (*«Физтех», 2013, 9–11*) Сколько пар натуральных чисел (x,y) удовлетворяют равенству $\text{НОД}(x,y)+\text{НОК}(x,y)=2011$?

9 «Росатом»

9.1. (*«Росатом», 2021, 8.2*) На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида $\dfrac{3n+2}{5n-7}$? При каких целых n это может произойти?

Можно сократить на 31 при $n = 31k - 11$, $k \in \mathbb{Z}$

10 Свойство Лукача

Рассмотрим последовательность натуральных чисел a_1, a_2, … (для технических целей положим также $a_0=0$). Будем говорить, что эта последовательность обладает *свойством Лукача*, если выполнено равенство $(a_m,a_n)=a_d$, где $d=(m,n)$ — наибольший общий делитель m и n.

10.1. Докажите, что если $(a_n,a_k)=(a_{n-k},a_k)$ при $n>k$, то последовательность a_n обладает свойством Лукача.

10.2. Докажите, что последовательность $a_n=2^n-1$ обладает свойством Лукача.

10.3. (*Всесоюз., 1988, 10.7*) Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_0=0,\ a_n=P(a_{n-1}),\ n=1,2,\ldots,$$

где $P(x)$ — многочлен с натуральными коэффициентами. Докажите, что для любых натуральных чисел m и k с наибольшим общим делителем d наибольший общий делитель чисел a_m и a_k равен a_d.

10.4. *Числа Фибоначчи* задаются соотношениями $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ (при $n\geqslant 2$).
а) Докажите, что $F_n=F_{k+1}F_{n-k}+F_kF_{n-k-1}$ при $n>k$.
б) Докажите, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты.
в) (*Теорема Лукача*) Докажите, что $(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$.