Неравенство треугольника

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку D, а на продолжении AC за вершину C — точку E, причём $AD = CE$. Докажите, что $BD+BE > AB+BC$.

Задача 2. Диагонали AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O; известно также, что в трапецию можно вписать окружность. Докажите, что $\angle BOC > 60^\circ$.

Задача 3. (*Московская устная олимпиада, 2019, 7.5*) Прямоугольный лист бумаги согнули по диагонали. Может ли периметр полученного пятиугольника оказаться равным периметру исходного листа?

Задача 4. (*ММО, 1997, 9.1*) В треугольнике одна сторона в три раза меньше суммы двух других. Докажите, что против этой стороны лежит наименьший угол треугольника.

Задача 5. (*Моск. матем. регата, 2012, 9*) На плоскости дан квадрат и точка P. Могут ли расстояния от точки P до вершин квадрата оказаться равными 1, 1, 2 и 3?

Задача 6. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника

а) не больше $3P/4$, где P — периметр этого треугольника;

б) не меньше $3p/4$, где p — полупериметр этого треугольника.

Задача 7. (*ММО, 2020, 9.2*) Из шести палочек попарно различной длины сложены два треугольника (по три палочки в каждом). Всегда ли можно сложить из них один треугольник, стороны которого состоят из одной, двух и трех палочек соответственно?

Задача 8. (*ММО, 2002, 8.5*) В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что если угол AMB а) прямой; б) острый, то $AC + BC > 3AB$.

Задача 9. (*Всеросс., 1993, финал, 9.2*) Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причём $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

Задача 10. (*Олимпиада Эйлера, финал, 2017.3*) Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = BC = CD = DE = 1$. Докажите, что $AD < 2$.

Задача 11. (*Олимпиада Эйлера, финал, 2016.3*) Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку A, точка E — на продолжении BC за точку C, а точка F — на продолжении AC за точку C так, что $CF = AD$ и $AC + EF = DE$. Найдите угол BDE.

Задача 12. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точке K, причём точка K делит ломаную ACB на две части равной длины. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

Задача 13. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.

Задача 14. (*Турнир городов, 1985, 7–8*) В прямоугольник вписан четырёхугольник (на каждой стороне прямоугольника по одной вершине четырёхугольника). Докажите, что периметр четырёхугольника не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.

Задача 15. (*Турнир городов, 1989, 7–8*) В треугольнике ABC проведена медиана AM. Может ли радиус вписанной окружности треугольника ABM быть ровно в два раза больше радиуса вписанной окружности треугольника ACM?

Задача 16. (*Турнир городов, 2006, 8–9*) Отрезок единичной длины разбили на 11 отрезков, длина каждого из которых не превосходит a. При каких значениях a можно утверждать, что из любых трёх получившихся отрезков можно составить треугольник?

Задача 17. (*Турнир городов, 2014, 8–9*) Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

Задача 18. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Даны N прямоугольных треугольников. У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что у всех исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему, если

а) $N = 2$;

б) N — любое натуральное число, большее 1.

Задача 19. (*Турнир городов, 1991, 8–9*) Стороны AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ равны соответственно сторонам $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ и $D'A'$ четырёхугольника $A'B'C'D'$, причём известно, что $AB \parallel CD$ и $B'C' \parallel D'A'$. Докажите, что оба четырёхугольника — параллелограммы.

Задача 20. (*Всеросс. по геометрии, 2012, 8.5*) Существует ли такие выпуклый четырёхугольник и точка P внутри него, что сумма расстояний от P до вершин больше периметра четырёхугольника?

Задача 21. (*ММО, 2011, 11.3*) В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.