Многогранники

1. (*МФТИ, 1995.5*) На ребре AC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка K так, что $AK = \frac{1}{4}$, $CK = \frac{3}{4}$. Через точку K проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{7}{6}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

$\boxed{V = \frac{8}{3}}$

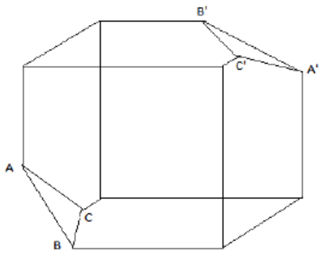
2. (*МГУ, мехмат, 2004-07.3*) Выпуклый многогранник $ABCDFE$ имеет пять граней: CDF, ABE, $BCFE$, $ADFE$ и $ABCD$. Ребро AB параллельно ребру CD. Точки K и L расположены соответственно на ребрах AD и BC так, что отрезок KL делит площадь грани $ABCD$ пополам. Точка M является серединой ребра EF и вершиной пирамиды $MABCD$, объем которой равен 6. Найти объем пирамиды $EKLF$, если известно, что объем многогранника $ABCDFE$ равен 19.

$\boxed{13}$

3. (*МГУ, мехмат, 2001-07.6*) Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD$-$A'B'C'D'$ повернули в плоскости ABC на угол $30°$ вокруг точки пересечения диагоналей AC и BD (вершина A повернулась в направлении вершины D), а боковые грани заменили гранями $AA'B$, $A'B'B$, $BB'C$, $B'C'C$, $CC'D$, $C'D'D$, $DD'A$ и $D'A'A$. Найти все значения, которые может принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости ABC, если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 42.

$\boxed{26;\ \left[42;\ \frac{253+84\sqrt{3}}{8}\right]}$

4. (*«Курчатов», 2016, 11.5*) У куба выбрали две противоположные вершины M и M' и плоскими сечениями ABC и $A'B'C'$ отрезали от него две треугольные пирамиды $MABC$ и $M'A'B'C'$. Получился восьмигранник (см. рисунок) Три расстояния оказались попарно различны: между прямыми AB и $A'B'$, между прямыми BC и $B'C'$ и между прямыми AC и $A'C'$. Докажите, что у прямых AA', BB' и CC' есть общая точка.



5. (*Моск. матем. регата, 2013, 11*) Какое наибольшее количество треугольных граней может иметь пятигранник?

6. (*«Высшая проба», 2017, 11.3*) Выпуклый многогранник имеет 8 вершин и 6 четырёхугольных граней. Может ли проекция этого многогранника на некоторую плоскость оказаться правильным 8-угольником?

7. (*Всеросс., 2006, округ, 10*) У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n \geqslant 3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходится ровно три ребра, может быть у такого многогранника?

8. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) В координатном пространстве провели все плоскости с уравнениями

$$x \pm y \pm z = n$$

(при всех целых n). Они разбили пространство на тетраэдры и октаэдры. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) с рациональными координатами не лежит ни в одной проведённой плоскости. Докажите, что найдётся натуральное k, при котором точка (kx_0, ky_0, kz_0) лежит строго внутри некоторого октаэдра разбиения.

9. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Существует ли выпуклый многогранник, у которого есть диагонали и каждая диагональ меньше любого ребра?

10. (*Всеросс. по геометрии, 2014, 10*) Верно ли, что существуют выпуклые многогранники с любым количеством диагоналей? (*Диагональю* называется отрезок, соединяющий две вершины многогранника и не лежащий на его поверхности.)

11. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 10*) Выпуклые многогранники A и B не имеют общих точек. Многогранник A имеет ровно 2012 плоскостей симметрии. Каково наибольшее возможное количество плоскостей симметрии у фигуры, состоящей из A и B, если B имеет

а) 2012;

б) 2013 плоскостей симметрии?

в) Каков будет ответ в пункте б), если плоскости симметрии заменить на оси симметрии?

12. (*Всеросс. по геометрии, 2010, 10*) Каждый из двух правильных многогранников P и Q разрезали плоскостью на две части. Одну из частей P и одну из частей Q приложили друг к другу по плоскости разреза. Может ли получиться правильный многогранник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть граней?

13. (*Всеросс. по геометрии, 2010, 10*) Среди вершин двух неравных икосаэдров можно выбрать шесть, являющихся вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение рёбер икосаэдров.

$\boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

14. (*Всеросс. по геометрии, 2009, 10*) Верно ли, что при любом n правильный $2n$-угольник является проекцией некоторого многогранника, имеющего не более, чем $n+2$ грани?

15. (*Всеросс. по геометрии, 2009, 10*) Можно ли вписать октаэдр в додекаэдр так, чтобы каждая вершина октаэдра была вершиной додекаэдра?

16. (*Всеросс. по геометрии, 2007, 10*) Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на некоторый вектор так, что рёбра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

17. (*ММО, 2017, 10.4*) У Васи есть камень (однородный, без внутренних полостей), имеющий форму выпуклого многогранника, у которого есть только треугольные и шестиугольные грани. Вася утверждает, что он разбил этот камень на две части так, что можно сложить из них куб (без внутренних полостей). Могут ли слова Васи быть правдой?

18. (*ММО, 2003, 10*) По рёбрам выпуклого многогранника с 2003 вершинами проведена замкнутая ломаная, проходящая через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в каждой из частей, на которые эта ломаная делит поверхность многогранника, количество граней с нечётным числом сторон нечётно.

19. (*ММО, 1973, 10*) Доказать, что у всякого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

20. (*ММО, 1992, 10*) Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с чётным числом сторон. Обязательно ли его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну рёбер разных цветов?

21. (*ММО, 1994, 11*) Придумайте многогранник, у которого нет трех граней с одинаковым числом сторон.

22. (*ММО, 1997, 11*) Можно ли разбить правильный тетраэдр с ребром 1 на правильные тетраэдры и октаэдры, длины рёбер каждого из которых меньше $1/100$?

23. (*ММО, 1999, 11*) Грани правильного октаэдра раскрашены в белый и чёрный цвет. При этом любые две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета. Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей чёрных граней.

24. (*ММО, 2015, 11*) Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

25. (*ММО, 2003, 11*) У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника?

26. (*ММО, 2000, 11*) Можно ли расположить бесконечное число равных выпуклых многогранников в слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями, так чтобы ни один многогранник нельзя было вынуть из слоя, не сдвигая остальных?

27. (*ММО, 2001, 11*) Докажите, что в пространстве существует такое расположение 2001 выпуклого многогранника, что никакие три из многогранников не имеют общих точек, а каждые два касаются друг друга (то есть имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

28. (*ММО, 2008, 11*) Среди вершин любого ли многогранника можно выбрать четыре вершины тетраэдра, площадь проекции которого на любую плоскость составляет от площади проекции (на ту же плоскость) исходного многогранника: а) больше, чем $1/4$; б) не меньше, чем $1/9$; в) не меньше, чем $1/7$?

29. (*ММО, 1994, 11*) Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются (по внутренним точкам).

30. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 10–11*) Внутри выпуклого многогранника выбрана точка P и несколько прямых $\ell_1, \ldots, \ell_n$, проходящих через P и не лежащих в одной плоскости. Каждой грани многогранника поставим в соответствие ту из прямых $\ell_1, \ldots, \ell_n$, которая образует наибольший угол с плоскостью этой грани (если таких прямых несколько, выберем любую из них). Докажите, что найдётся грань, которая пересекается с соответствующей ей прямой.

31. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 10–11*) Существует ли многогранник, у которого отношение площадей любых двух граней не меньше 2?

32. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2009, 10–11*) Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся три ребра, из которых можно составить треугольник.

33. (*Турнир городов, 1990, 10–11*) Существует ли выпуклый многогранник, одно из сечений которого — треугольник (сечение не проходит через вершины), и в каждой вершине сходятся

а) не меньше пяти рёбер;

б) ровно пять рёбер?

34. (*Турнир городов, 2011, 10–11*) Грани выпуклого многогранника — подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и ещё одну пару равных граней).

35. (*Турнир городов, 2012, 10–11*) Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят ровно три ребра, причем хотя бы два из этих трёх рёбер равны. Докажите, что многогранник имеет хотя бы три равных ребра.

36. (*Турнир городов, 2013, 10–11*) Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:

а) равные многоугольники;

б) правильные многоугольники?

37. (*Турнир городов, 2000, 10–11*) Докажите, что у выпуклого $10n$-гранника найдётся n граней с одинаковым числом сторон.

38. (*Турнир городов, 1995, 10–11*) Существует ли такой невыпуклый многогранник, что из некоторой точки M, лежащей вне него, не видна ни одна из его вершин? (Многогранник сделан из непрозрачного материала, так что сквозь него ничего не видно.)

39. (*Турнир городов, 1990, 10–11*) Какое минимальное количество точек на поверхности

а) додекаэдра;

б) икосаэдра

надо отметить, чтобы на каждой грани была хотя бы одна отмеченная точка?

40. (*Турнир городов, 2010, 10–11*) Можно ли поверхность октаэдра оклеить несколькими правильными шестиугольниками без наложений и пробелов?