Точка Микеля

Задача 1. Прямая пересекает стороны AB, BC и AC треугольника ABC (или их продолжения) в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что описанные окружности треугольников ABC, A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1 проходят через одну точку (*точка Микеля*).

б) Докажите, что центры четырёх указанных окружностей и точка Микеля расположены на одной окружности.

Задача 2. На плоскости расположены равные отрезки AB и CD. Пусть лучи AB и DC пересекаются в точке E, а отрезки AC и BD — в точке F.

а) Очевидно, что отрезки AB и CD совмещаются поворотом, переводящим A в C и B в D. Где находится центр O этого поворота?

б) При каком условии точка O лежит на отрезке AD?

б) Точки B, E, C, F лежат на одной окружности

Задача 3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи BC и AD — в точке F. Известно, что $BE = DF$. Докажите, что $CE = CF$.

Задача 4. (*IMO, 2005*) Let $ABCD$ be a fixed convex quadrilateral with $BC = DA$ and BC not parallel with DA. Let two variable points E and F lie on the sides BC and DA respectively and satisfy $BE = DF$. The lines AC and BD meet at P, the lines BD and EF meet at Q, the lines EF and AC meet at R. Prove that the circumcircles of the triangles PQR, as E and F vary, have a common point other than P.

Задача 5. (*Всеросс., 2014, финал, 10–11*) Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

Задача 6. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, имеют общую точку.

Задача 7. (*ММО, 2007, 11*) Точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB'$.