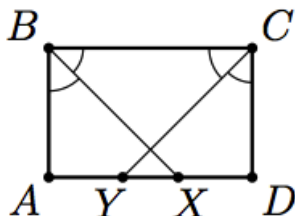


## Медианы, высоты, биссектрисы

ЗАДАЧА 1. (Всеросс., 2018, ШЭ, 8.2) В прямоугольнике  $ABCD$  сторона  $AB$  равна 6, сторона  $BC$  равна 11. Из вершин  $B$  и  $C$  проведены биссектрисы углов, пересекающие сторону  $AD$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Найдите длину отрезка  $XY$ .



I

ЗАДАЧА 2. (Всеросс., 2016, ШЭ, 8.5) В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AB$  на стороне  $CB$  выбрана точка  $D$  так, что  $CD = AC - AB$ . Точка  $M$  — середина  $AD$ . Докажите, что угол  $BMC$  — тупой.

ЗАДАЧА 3. («Физтех», 2023, 8) Биссектриса внутреннего угла при вершине  $A$  и биссектриса внешнего угла при вершине  $B$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $E$ . Найдите  $\angle BEC$ , если  $\angle BAC = 10^\circ$ . Ответ укажите в градусах.

98

ЗАДАЧА 4. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.6) В треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром  $O$ , к которой проведена касательная, пересекающая стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите угол  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle MON = \varphi$ .

07 - 081

ЗАДАЧА 5. («Физтех», 2017, 9.7, 10.7) В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ ;  $MD$  и  $ME$  — биссектрисы треугольников  $AMB$  и  $CMB$  соответственно. Отрезки  $BM$  и  $DE$  пересекаются в точке  $P$ , причём  $BP = 2$ ,  $MP = 4$ .

а) Найдите отрезок  $DE$ .

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника  $ADEC$  можно описать окружность. Найдите её радиус.

8; 6) 2^{\sqrt{85}}

ЗАДАЧА 6. («Курчатов», 2016, 9.3) Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ . На боковой стороне  $AB$  отметили такую точку  $M$ , что  $CM = AC$ . Затем на боковой стороне  $BC$  отметили такую точку  $N$ , что  $BN = MN$ , и провели биссектрису  $NH$  в треугольнике  $CNM$ . Докажите, что  $H$  лежит на медиане  $BK$  треугольника  $ABC$ .

ЗАДАЧА 7. («Ломоносов», 2011, 9.8) В равнобедренном треугольнике  $ABC$  провели биссектрису  $BP$ . Докажите, что если угол  $BAC$  равен  $100^\circ$ , то  $AP + PB = BC$ .

ЗАДАЧА 8. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9) В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AK$  перпендикулярна медиане  $CL$ . Докажите, что в треугольнике  $BKL$  также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

ЗАДАЧА 9. (Турнир городов, 2014, 8–9) В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  — прямой. На катете  $CB$  как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка  $N$  — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая  $AN$  делит пополам биссектрису угла  $C$ .

ЗАДАЧА 10. (Турнир городов, 2010, 8–9) На сторонах  $BC$  и  $CD$  ромба  $ABCD$  взяли точки  $P$  и  $Q$  соответственно так, что  $BP = CQ$ . Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $APQ$  лежит на диагонали  $BD$  ромба.

ЗАДАЧА 11. (Турнир городов, 2016, 8–9) На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нём красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами?

ЗАДАЧА 12. (ММО, 2016, 8.3) На медиане  $AM$  треугольника  $ABC$  нашлась такая точка  $K$ , что  $AK = BM$ . Кроме того,  $\angle AMC = 60^\circ$ . Докажите, что  $AC = BK$ .

ЗАДАЧА 13. (Олимпиада им. Эйлера, РЭ, 2016.8) Точки  $M$  и  $N$  — середины биссектрис  $AK$  и  $CL$  треугольника  $ABC$  соответственно. Докажите, что угол  $ABC$  прямой тогда и только тогда, когда  $\angle MBN = 45^\circ$ .

ЗАДАЧА 14. (ММО, 2016, 9.2) В треугольнике  $ABC$  на продолжении медианы  $CM$  за точку  $C$  отметили точку  $K$  так, что  $AM = CK$ . Известно, что угол  $BMC$  равен  $60^\circ$ . Докажите, что  $AC = BK$ .

ЗАДАЧА 15. (ММО, 2015, 10.5) Дан треугольник  $ABC$ . Проведены высота  $AH$  и медиана  $CM$ . Обозначим точку их пересечения через  $P$ . Высота, проведённая из вершины  $B$  треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки  $H$  на прямую  $CM$ , в точке  $Q$ . Докажите, что прямые  $CQ$  и  $BP$  перпендикулярны.

ЗАДАЧА 16. (МГУ, мехмат, 1999-03.4) Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ ,  $AB = AD$ ,  $CA$  — биссектриса угла  $C$ ,  $\angle BAD = 140^\circ$ ,  $\angle BEA = 110^\circ$ . Найти угол  $CDB$ .

ЗАДАЧА 17. (МГУ, мехмат, 2003-03.3) На продолжении биссектрисы  $AL$  треугольника  $ABC$  за точку  $A$  взята такая точка  $D$ , что  $AD = 10$  и  $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ . Какова наименьшая площадь треугольника  $BDC$  при данных условиях?

3/75/25