Олимпиадная математика. 6–7 классы

Задачник 6–7.2019

Данное пособие предназначено для учеников 6 и 7 классов, увлечённых математикой и желающих показывать хорошие результаты на олимпиадах высокого уровня.

Путь успешного московского олимпиадника часто начинается с получения дипломов на Математическом празднике, Турнире Архимеда и Городской устной математической олимпиаде для 6–7 классов. Именно здесь закладывается фундамент дальнейшей подготовки к Московской математической олимпиаде (8 класс), а также к мероприятиям общероссийского уровня: олимпиаде им. Леонарда Эйлера (8 класс) и Всероссийской олимпиаде школьников по математике (9–11 классы).

Пособие содержит:

- задачи Математического праздника (1990–2019);
- задачи зимнего тура Турнира Архимеда (2012–2019);
- задачи Городской устной математической олимпиады для 6–7 классов (2002–2019).

Олимпиадные задачи, включённые в пособие, имеют маркировку, расшифровка которой ясна из следующих примеров.

- [Mpr — 2016.6.4] — Математический праздник, 2016 год, 6 класс, задача №4.
- [Arh — 2015.6] — Турнир Архимеда (зимний тур), 2015 год, задача №6.
- [Ust — 2014.7.8] — Городская устная математическая олимпиада для 6–7 классов, 2014 год, 7 класс, задача №8.

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее. На Матпразднике и Турнире Архимеда обычно предлагается по шесть задач, на Городской устной олимпиаде — девять.

Последняя версия данного пособия находится по адресу:
`http://mathus.ru/math/matholymp67.pdf`.

Группировка задач по темам во многом следует тематическому каталогу [2] (как наиболее удачному с нашей точки зрения).

Литература

[1] И. В. Ященко. Приглашение на Математический праздник. М.: МЦНМО, 2005.

[2] Сайт http://problems.ru.

[3] Сайт Матпраздника: http://olympiads.mccme.ru/matprazdnik.

[4] Сайт Турнира Архимеда: http://www.arhimedes.org.

[5] Сайт Городской устной математической олимпиады для 6—7 классов: http://olympiads.mccme.ru/ustn.

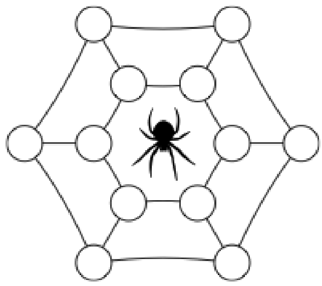
Оглавление

Глава 1

Начало

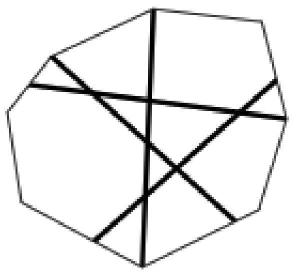
1.1 Примеры и конструкции

1.1.1. [Mpr — 2018.6.1] Паук сплёл паутину, и во все её 12 узелков попалось по мухе или комару. При этом каждое насекомое оказалось соединено отрезком паутины ровно с двумя комарами. Нарисуйте пример, как это могло быть (написав внутри узелков буквы М и К).



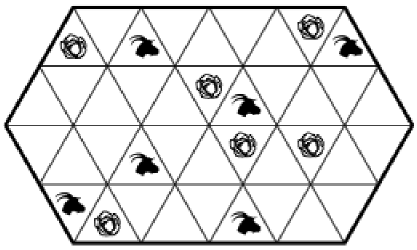
1.1.2. [Mpr — 1994.6.1] Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли такое быть?

1.1.3. [Mpr — 2015.6.1] Через двор проходят четыре пересекающиеся тропинки (см. план). Посадите четыре яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.

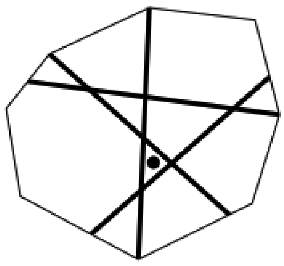


1.1.4. [Mpr — 2019.7.1] Ньют хочет перевезти девять фантастических тварей весом 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 кг в трех чемоданах, по три твари в каждом. Каждый чемодан должен весить меньше 20 кг. Если вес какой-нибудь твари будет делиться на вес другой твари из того же чемодана, они подерутся. Как Ньюту распределить тварей по чемоданам, чтобы никто не подрался?

1.1.5. [Mpr — 2017.6.1;7.1] Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз. Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз.

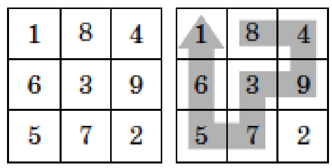


1.1.6. [Mpr — 2015.7.1] Во дворе, где проходят четыре пересекающиеся тропинки, растет одна яблоня (см. план). Посадите ещё три яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.

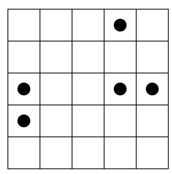


1.1.7. [Mpr — 2012.7.1] Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды.

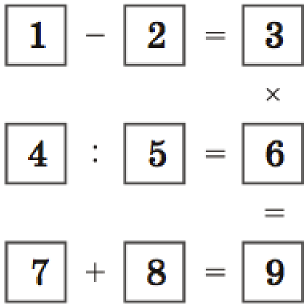
Петя прошёл, как показано на рисунке справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, — получилось число 84937561. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось число побольше (чем больше, тем лучше).



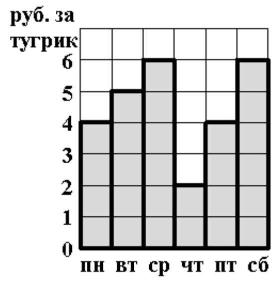
1.1.8. [Arh — 2014.1] Требуется передвинуть каждую из пяти фишек на соседнюю клетку так, чтобы в итоге в каждой строке, каждом столбце и на каждой диагонали оказалось не более одной фишки. (*Две клетки называются соседними, если они имеют общую сторону.*) Покажите, как это сделать. (*Передвижения фишек покажите стрелками.*)



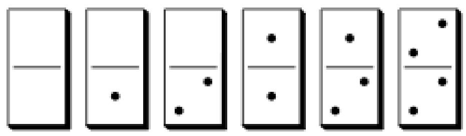
1.1.9. [Arh — 2017.1] На рисунке расставлены карточки с числами 1, 2, 3, ..., 9 так, что получились четыре неверных равенства (три горизонтальных, одно вертикальное). Переставьте эти карточки так, чтобы все равенства стали верными. Достаточно привести ответ.



1.1.10. [Mpr — 2005.7.1] На рисунке изображено, как изменялся курс тугрика в течение недели. У Пети было 30 рублей. В один из дней недели он обменял все свои рубли на тугрики. Потом он обменял все тугрики на рубли. Затем он ещё раз обменял все вырученные рубли на тугрики, и в конце концов, обменял все тугрики обратно на рубли. Напишите, в какие дни он совершал эти операции, если в воскресенье у него оказалось 54 рубля. (Достаточно привести пример.)

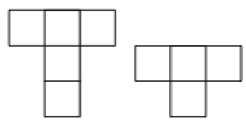


1.1.11. [Mpr — 2014.6.2] Из шести костяшек домино (см. рисунок) сложите прямоугольник 3×4 так, чтобы во всех трёх строчках точек было поровну и во всех четырёх столбцах точек было тоже поровну. (Выделите пожирнее границы доминошек.)



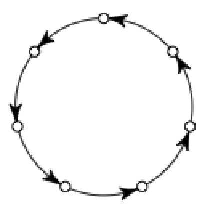
1.1.12. [Mpr — 2010.6.3] Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

1.1.13. [Mpr — 2014.6.4] Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображённых слева, а можно — на пять фигурок, изображённых справа. (Фигурки можно поворачивать.)



1.1.14. [Mpr — 2007.6.4] В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

1.1.15. [Mpr — 2019.6.4] Семь городов соединены по кругу семью односторонними авиарейсами (см. рис.). Назначьте (нарисуйте стрелочками) еще несколько односторонних рейсов так, чтобы от любого города до любого другого можно было бы добраться, сделав не более двух пересадок. Постарайтесь сделать число дополнительных рейсов как можно меньше.



1.1.16. [Ust — 2010.6.4] Дан куб с ребром 2. Покажите, как наклеить на него без наложений 10 квадратов со стороной 1 так, чтобы никакие квадраты не граничили по отрезку (по стороне или её части). Перегибать квадраты нельзя.

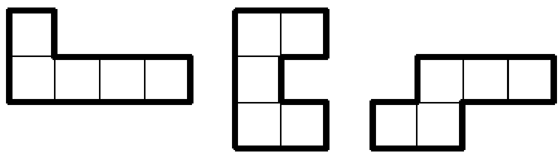
1.1.17. [Mpr — 2016.7.3] Сложите из трёх одинаковых клетчатых фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии.

1.1.18. [Mpr — 1998.6.5;7.3] На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B — 50 км, между A и C — 40 км, между C и D — 25 км, между D и A — 35 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону).

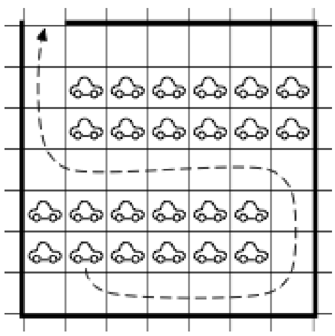
а) Приведите пример расположения бензоколонок (с указанием расстояний между ними), удовлетворяющий условию задачи.

б) Найдите расстояние между B и C (укажите все возможности).

1.1.19. [Mpr — 2007.6.5;7.5] Нарисуйте, как из данных трёх фигурок, использовав каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии.

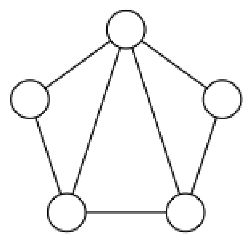


1.1.20. [Mpr — 2008.6.5] Автостоянка в Цветочном городе представляет собой квадрат 7×7 клеточек, в каждой из которых можно поставить машину. Стоянка обнесена забором, одна из сторон угловой клетки удалена (это ворота). Машина ездит по дорожке шириной в клетку. Незнайку попросили разместить как можно больше машин на стоянке таким образом, чтобы любая могла выехать, когда прочие стоят. Незнайка расставил 24 машины так, как показано на рисунке. Попытайтесь расставить машины по-другому, чтобы их поместилось больше.



Можно поставить 28 машин. Можно ли больше — неизвестно

1.1.21. [Ust — 2014.7.5] Впишите в пять кружков натуральные числа так, чтобы выполнялись два условия:



- если два кружка соединены линией, то стоящие в них числа должны отличаться ровно в два или ровно в четыре раза;
- если два кружка не соединены линией, то отношение стоящих в них чисел не должно быть равно ни 2, ни 4.

1.1.22. [Mpr — 2006.7.5] Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растут груши и яблони, причём яблони посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя, значит, яблонь вдвое меньше, чем груш». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду вдвое больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда.

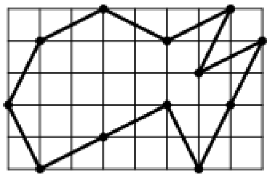
1.1.23. [Mpr — 2009.7.5] Начертите два четырёхугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить:

а) как треугольник, так и пятиугольник;

б) и треугольник, и четырёхугольник, и пятиугольник.

Покажите, как это можно сделать.

1.1.24. [Mpr — 2014.7.5] Незнайка рисует замкнутые пути внутри прямоугольника 5×8, идущие по диагоналям прямоугольников 1×2. На рисунке изображен пример пути, проходящего по 12 таким диагоналям. Помогите Незнайке нарисовать путь как можно длиннее.



Самый длинный известный путь содержит 24 диагонали

1.1.25. [Ust — 2018.6.8] Есть доска размером 7×12 клеток и кубик, грань которого равна клетке. Одна грань кубика окрашена невысыхающей краской. Кубик можно поставить в некоторую клетку доски и перекатывать через ребро на соседнюю грань. Ставить кубик дважды на одну и ту же клетку нельзя. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить кубик, не испачкав доску краской?

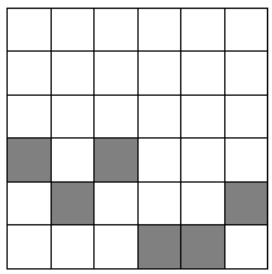
1.2 Да или нет?

1.2.1. [Ust — 2005.7.1] У электромонтёра был кусок провода длиной 25 м, из которого утром он собирался вырезать необходимые для работы куски в 1 м, 2 м, 3 м, 6 м и 12 м. Но утром обнаружилось, что ночью какой-то хулиган разрезал провод на две части. Сможет ли монтёр выполнить намеченные работы?

1.2.2. [Ust — 2019.7.2] Дан равносторонний треугольник. Существует ли четырехзвенная ломаная, вершины которой не совпадают с вершинами данного треугольника, и которая через каждую вершину этого треугольника проходит дважды?

1.2.3. [Ust — 2018.7.2] Можно ли внутри выпуклого пятиугольника отметить 18 точек так, чтобы внутри каждого из десяти треугольников, образованных его вершинами, отмеченных точек было поровну?

1.2.4. [Mpr — 2013.7.2] В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат:



а) за 5 или менее;

б) за 4 или менее;

в) за 3 или менее таких перегибания?

(Если да, впишите в каждую клетку номер сгибания, после которого она будет закрашена впервые, линию сгиба проведите и пометьте той же цифрой. Если нет, докажите это.)

1.2.5. [Arh — 2018.2] Имеется 12 сосисок длиной 13 см каждая. Их требуется разделить между 13 котятами, 13 кошками и 13 котами так, чтобы каждому котёнку достался кусок сосиски длиной 3 см, каждой кошке — кусок сосиски длиной 4 см, а каждому коту — кусок сосиски длиной 5 см. Можно ли это сделать? (Сосиску режут поперёк.)

1.2.6. [Mpr — 2005.7.2] Можно ли расставить числа

а) от 1 до 7;

б) от 1 до 9

по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

1.2.7. [Ust — 2018.6.4] Квадрат 4×4 называется *магическим*, если в его клетках встречаются все числа от 1 до 16, а суммы чисел в столбцах, строках и двух диагоналях равны между собой. Шестиклассник Сеня начал составлять магический квадрат и поставил в какую-то клетку число 1. Его младший брат Лёня решил ему помочь и поставил числа 2 и 3 в клетки, соседние по стороне с числом 1. Сможет ли Сеня после такой помощи составить магический квадрат?

1.2.8. [Ust — 2011.6.4;7.2] Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую *нечестной*, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё отмеченных точек не поровну. Можно ли отметить 7 точек и провести для них 5 нечестных прямых?

1.2.9. [Ust — 2006.6.4] По кругу было записано 8 чисел. Затем между каждыми соседними числами записали их сумму, а старые числа стёрли. Могло ли оказаться так, что теперь по кругу записаны числа 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18?

1.2.10. [Mpr — 2005.6.5] В числах `МИХАЙЛО` и `ЛОМОНОСОВ` каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечётными?

1.2.11. [Ust — 2004.6.5] В 6А классе учится 27 школьников. Им предложили посещать кружки по пению, молчанию и чтению стихов. Каждый хочет посещать один или несколько из этих кружков. Оказалось, что в каждый кружок желает ходить более трети класса. Можно ли составить такие списки кружков, что каждый будет ходить ровно в один кружок, в который хочет, и во всех кружках будет поровну школьников?

1.2.12. [Ust — 2004.7.4] В 8А классе учится 27 школьников. Им предложили посещать кружки по пению, молчанию и чтению стихов. Каждый хочет посещать один или несколько из этих кружков. Оказалось, что в каждый кружок желает ходить более трети класса. Нужно распределить детей по кружкам так, чтобы каждый посещал только один кружок, причём из тех, которые хотел, и во всех кружках было поровну детей. Всегда ли это возможно?

1.2.13. [Arh — 2012.4] Можно ли вычеркнуть одно из натуральных чисел от 1 до 9, а оставшиеся числа расставить в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на каждой грани куба были равны между собой, но не были кратны вычеркнутому числу?

1.2.14. [Mpr — 2010.7.5] а) Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

б) А может ли Наф-Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом?

1.2.15. [Mpr — 2008.7.5] Серёжа вырезал из картона две одинаковые фигуры. Он положил их с нахлёстом на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую?

1.2.16. [Mpr — 2019.7.5] Максим сложил на столе из 9 квадратов и 19 равносторонних треугольников (не накладывая их друг на друга) многоугольник. Мог ли периметр этого многоугольника оказаться равным 15 см, если стороны всех квадратов и треугольников равны 1 см?

1.2.17. [Arh — 2019.5] Требуется расставить в квадратной таблице 6×6 крестики и нолики так, чтобы внутри любого квадрата 3×3 крестиков было больше, чем ноликов, а внутри любого квадрата 5×5 ноликов было больше, чем крестиков. Возможно ли это? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.

1.2.18. [Ust — 2019.6.6] Маша нарисовала замкнутую семизвенную ломаную. Для каждого звена она записала, со сколькими звеньями оно пересекается во внутренних точках. Могла ли она записать в каком-нибудь порядке числа 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1? (Любые два звена ломаной, не являющиеся соседними, либо пересекаются во внутренней точке, либо не имеют общих точек.)

Глава 2

Арифметика

2.1 Десятичная система счисления

2.1.1. [Mpr — 2019.6.1] Саша выписала числа от одного до ста, а Миша часть из них стер. Среди оставшихся у 20 чисел есть в записи единица, у 19 чисел есть в записи двойка, а у 30 чисел нет ни единицы, ни двойки. Сколько чисел стер Миша?

2.1.2. [Mpr — 2008.6.1] Сегодня 17.02.2008. Наташа заметила, что в записи этой даты сумма первых четырёх цифр равна сумме последних четырёх. Когда в этом году такое совпадение случится в последний раз?

2.1.3. [Mpr — 2009.6.1] У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырёхзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова?

2.1.4. [Mpr — 2002.7.1] 2002 год — год-палиндром, то есть одинаково читается справа налево и слева направо. Предыдущий год-палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов-непалиндромов может идти подряд (между 1000 и 9999 годами)?

2.1.5. [Mpr — 1996.7.1] По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, ..., 9 в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

2.1.6. [Mpr — 1993.6.4] Если у числа x подсчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это ещё два раза, то получится ещё три числа. Найдите самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

2.1.7. [Mpr — 1991.6.5] Найдите числа, равные удвоенной сумме своих цифр.

2.1.8. [Ust — 2013.7.6] На рисунке приведены три примера показаний исправных электронных часов. Сколько палочек могут перестать работать, чтобы время всегда можно было определить однозначно?

2.1.9. [Ust — 2002.7.6] Некоторые числа представимы в виде суммы $\overline{abc}+\overline{ab}+a$, а некоторые — нет. (Например, число 1001 представимо, поскольку $1001 = 993+99+9$. А числа 220 и 1514 — не представимы.) Сколько существует трёхзначных чисел, представимых в виде суммы $\overline{abc}+\overline{ab}+a$?

2.1.10. [Ust — 2017.7.7] Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр в записи этого числа, а Саше — сумму этих цифр. Между мальчиками состоялся такой диалог:

Петя: «Я угадаю задуманное число с трёх попыток, но двух мне может не хватить».

Саша: «Если так, то мне для этого хватит четырёх попыток, но трёх может не хватить».
Какое число было сообщено Саше?

2.2 Арифметические действия

2.2.1. [Mpr — 2000.6.1] В записи $*1*2*4*8*16*32*64 = 27$ вместо знаков «$*$» поставьте знаки «$+$» или «$-$» так, чтобы равенство стало верным.

2.2.2. [Mpr — 1997.6.1] Витя выложил из карточек с цифрами пример на сложение и затем поменял местами две карточки. Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}314159\\291828\end{array}\\ \hline 585787\end{array}$$

2.2.3. [Mpr — 1991.6.1;7.1] Автобусный билет будем считать счастливым, если между его цифрами можно в нужных местах расставить знаки четырёх арифметических действий и скобки так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100. Является ли счастливым билет №123456?

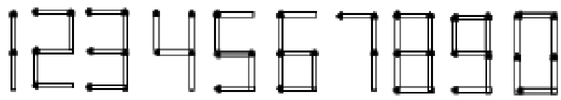
2.2.4. [Ust — 2014.7.1] Используя три различных знака арифметических действий и знак равенства, получите верное равенство из записи сегодняшней даты: 16032014.

2.2.5. [Arh — 2019.1] Дано выражение

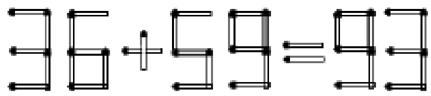
$$\frac{2019*217*20*19*8}{2018*101*20*18*11}.$$

Можно ли вместо звёздочек поставить знаки «$+$» и «$-$» так, чтобы после вычислений получилось: а) 7/6; б) 11/9? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.

2.2.6. [Ust — 2004.6.4] Петя выкладывал примеры из спичек. Цифры он «записывал» следующим образом:



Когда Петя отвлёкся, Вася в записанном им верном примере на сложение внутри каждой цифры переложил ровно одну спичку и получил:



Восстановите исходное равенство.

2.2.7. [Mpr — 1995.7.4] Расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1 - 2 \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 = 1995.$$

2.3 Ребусы

2.3.1. [Arh — 2013.1] Подберите вместо букв цифры так, чтобы равенство стало верным. Все решения находить не требуется.

$$22 + \texttt{ТУРН} + \texttt{ИР} = 2013.$$

2.3.2. [Mpr — 2001.6.1] Решите ребус: $\texttt{АХ} \cdot \texttt{УХ} = 2001$.

2.3.3. [Mpr — 2002.6.1] Решите ребус: $\texttt{БАО} \cdot \texttt{БА} \cdot \texttt{Б} = 2002$.

2.3.4. [Ust — 2011.6.1] Решите ребус: $\texttt{ЛЕТО} + \texttt{ЛЕС} = 2011$. Найдите все возможные решения.

2.3.5. [Ust — 2009.6.1] Известно, что $\texttt{ЖЖ} + \texttt{Ж} = \texttt{МЁД}$. На какую цифру оканчивается произведение $\texttt{В} \cdot \texttt{И} \cdot \texttt{Н} \cdot \texttt{Н} \cdot \texttt{И} \cdot \texttt{П} \cdot \texttt{У} \cdot \texttt{Х}$ (разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми — одинаковые)?

2.3.6. [Ust — 2006.6.1] В примере на сложение под звёздочками скрываются все десять цифр по одному разу. Найдите хотя бы один такой пример.

$$\begin{array}{rcccc} & & & & * \\ + & & & * & * \\ & & * & * & * \\ \hline & * & * & * & * \end{array}$$

2.3.7. [Ust — 2005.6.1] Найдите хотя бы одно решение ребуса

$$\mathtt{Я} + \mathtt{О} \cdot \mathtt{Н} + \mathtt{Д} \cdot \mathtt{Р} \cdot \mathtt{У} \cdot \mathtt{З} \cdot \mathtt{Ь} \cdot \mathtt{Я} = \mathtt{М} \cdot \mathtt{Ы}.$$

(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.)

2.3.8. [Ust — 2010.7.1] Замените буквы цифрами в ребусе

$$\mathtt{Г} + \mathtt{О} = \mathtt{Л} - \mathtt{О} = \mathtt{В} \cdot \mathtt{О} = \mathtt{Л} - \mathtt{О} = \mathtt{М} - \mathtt{К} = \mathtt{А}$$

так, чтобы все равенства стали верными; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а различным — различные. *Найдите все решения ребуса.*

2.3.9. [Ust — 2006.7.1] Найдите все решения ребуса и докажите, что других нет:

$$\mathtt{АР}^{\mathtt{А}} = \mathtt{РАТ}.$$

(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.)

2.3.10. [Mpr — 2003.6.2] Найдите наименьшее четырёхзначное число СЕЕМ, для которого существует решение ребуса МЫ + РОЖЬ = СЕЕМ. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)

2.3.11. [Mpr — 2013.6.2]

> Вот ребус довольно простой:
> ЭХ вчетверо больше, чем ОЙ,
> АЙ вчетверо больше, чем ОХ.
> Найди сумму всех четырёх.

2.3.12. [Ust — 2019.6.2] Буквами Е, Ё, Л, Н, С и Я заменили шесть различных цифр. Суммы цифр чисел ЛЁН, ЛЕС и СЕНЯ равны 3, 19 и 25 соответственно. Из какого числа получилось слово ЛЁНЯ?

2.3.13. [Mpr — 2000.6.3] Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок.

2.3.14. [Ust — 2002.6.3] Решите ребус ТИК + ТАК = АКТ.

2.3.15. [Mpr — 2011.6.4] Найдите все решения ребуса

$$\mathtt{Я} + \mathtt{ОН} + \mathtt{ОН} + \mathtt{ОН} + \mathtt{ОН} + \mathtt{ОН} + \mathtt{ОН} + \mathtt{ОН} + \mathtt{ОН} = \mathtt{МЫ}.$$

2.3.16. [Mpr — 1995.6.4] Заменить разные буквы разными цифрами, одинаковые — одинаковыми, а звёздочки — любыми так, чтобы получился правильный пример.

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} \mathtt{1995} \\ \mathtt{***} \end{array} \\
\hline
+\begin{array}{r} \mathtt{*****} \\ \mathtt{*ГОД} \end{array} \\
\hline
\mathtt{СВИНЬИ}
\end{array}
$$

2.3.17. [Ust — 2012.6.4] В равенстве `ТИХО` + `ТИГР` = `СПИТ` замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы — разными цифрами так, чтобы `ТИГР` был бы как можно меньше (нулей среди цифр нет). *Объясните, почему ещё меньше* `ТИГР` *быть не может.*

2.3.18. [Mpr — 1994.7.3] Когда Незнайку попросили придумать задачу для математической олимпиады в Солнечном городе, он написал ребус (см. рисунок). Можно ли его решить? (Разным буквам должны соответствовать разные цифры.)

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} \mathtt{АБВ} \\ \mathtt{ГДЕ} \end{array} \\
\hline
\mathtt{ЁЖЗИ}
\end{array}
$$

2.3.19. [Mpr — 2014.7.3] Замените в слове `МАТЕМАТИКА` буквы цифрами и знаками сложения и вычитания так, чтобы получилось числовое выражение, равное 2014. (Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры или знаки, разными — разные. Достаточно привести пример.)

2.3.20. [Mpr — 2016.6.5] Робот придумал шифр для записи слов: заменил некоторые буквы алфавита однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1, 2 и 3 (разные буквы он заменял разными числами). Сначала он записал шифром сам себя: `РОБОТ` = 3112131233. Зашифровав слова `КРОКОДИЛ` и `БЕГЕМОТ`, он с удивлением заметил, что числа вышли совершенно одинаковыми! Потом Робот записал слово `МАТЕМАТИКА`. Напишите число, которое у него получилось.

2.3.21. [Mpr — 2004.6.5] Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал её последний столбец: `ВКСАМО`.

Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» `МТТЛАРАЕКИС`. Что это за город, если его название начинается с буквы `С`?

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

2.3.22. [Mpr — 2004.7.4] Таня написала название своего родного города и все его циклические сдвиги (перестановки по кругу), получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила таблицу 2 и выписала её последний столбец: `ВКСАМО`.

Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» `ОССНГСОРОК`. Что это за город, если его название заканчивается на букву `К`?

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

2.3.23. [Mpr — 2014.6.6] Известный преступник профессор Мориарти долго скрывался от Шерлока Холмса и лондонской полиции. И вот однажды полицейским удалось перехватить телеграмму, которую Мориарти прислал сообщнику:

$$\boxed{\texttt{Встречай завтра поезд СТО вагон О}}$$

Инспектор Лестрейд уже распорядился было послать наряд полиции искать нулевой вагон сотого поезда, но тут принесли ещё две перехваченные телеграммы на тот же адрес:

$$\boxed{\mathtt{СЕКРЕТ} - \mathtt{ОТКРОЙ} = \mathtt{ОТВЕТ} - \mathtt{ТВОЙ}}$$

$$\boxed{\mathtt{СЕКРЕТ} - \mathtt{ОТКРЫТ} = 20010}$$

Лестрейд задумался. А Холмс воскликнул: «Теперь ясно, какой поезд надо встречать!» Инспектор удивился. «Элементарно, Лестрейд! — пояснил сыщик. — Это же шифр. В этих примерах одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные — разные, а чёрточка — это минус! Мориарти едет в поезде № ...»

Напишите номер поезда и вагона. Объясните, как мог рассуждать Холмс.

2.3.24. [Ust — 2008.6.8] Каждая буква в словах ЭХ и МОРОЗ соответствует какой-то цифре, причём одинаковым цифрам соответствуют одинаковые буквы, а разным — разные.

Известно, что $\mathtt{Э} \cdot \mathtt{Х} = \mathtt{М} \cdot \mathtt{О} \cdot \mathtt{Р} \cdot \mathtt{О} \cdot \mathtt{З}$, а $\mathtt{Э} + \mathtt{Х} = \mathtt{М} + \mathtt{О} + \mathtt{Р} + \mathtt{О} + \mathtt{З}$. Чему равно $\mathtt{Э} \cdot \mathtt{Х} + \mathtt{М} \cdot \mathtt{О} \cdot \mathtt{Р} \cdot \mathtt{О} \cdot \mathtt{З}$?

2.3.25. [Mpr — 2005.7.5] Решите ребус

$$250 \cdot \mathtt{ЛЕТ} + \mathtt{МГУ} = 2005 \cdot \mathtt{ГОД}.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми — одинаковые; при этом некоторыми буквами могут быть обозначены уже имеющиеся цифры 2, 5 и 0.)

а) Найдите хотя бы одно решение ребуса.

б) Докажите, что других решений нет.

2.3.26. [Arh — 2015.5] Вася составляет очередной ребус. Чтобы закончить работу, он хочет подобрать такие значения букв, чтобы число $\overline{\mathtt{ПАНОРАМА}}$ разделилось нацело на число $\overline{\mathtt{ПАНАМА}}$. Удастся ли ему это сделать? (В ребусе одинаковые буквы должны обозначать одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.)

2.3.27. [Ust — 2016.7.6] Мальвина записала равенство

$$\mathtt{МА} \cdot \mathtt{ТЕ} \cdot \mathtt{МА} \cdot \mathtt{ТИ} \cdot \mathtt{КА} = 2016000$$

и предложила Буратино заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами, чтобы равенство стало верным. Есть ли у Буратино шанс выполнить задание или таких замен не существует?

2.4 Чётность

2.4.1. [Mpr — 1990.5.1] В парламенте некоторой страны две палаты, имеющие равное число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причём воздержавшихся не было. Когда председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса, лидер оппозиции заявил, что результаты голосования сфальсифицированы. Как он это понял?

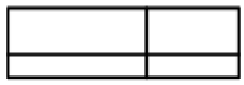
2.4.2. [Arh — 2013.5.5] Как-то раз Дядя Фёдор, Матроскин и Шарик отправились с почты домой. Дядя Фёдор вышел первым, а Матроскин последним. По дороге домой Дядя Фёдор обгонял других, либо его обгоняли ровно 8 раз. Матроскин обгонял других, либо его обгоняли ровно 6 раз. Известно, что Дядя Фёдор пришел домой позже, чем Шарик. В каком порядке друзья пришли домой?

2.4.3. [Mpr — 2005.6.3] Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).

б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

2.4.4. [Ust — 2010.6.3] На рисунке можно найти 9 прямоугольников. Известно, что у каждого из них длина и ширина — целые. Сколько прямоугольников из этих девяти могут иметь нечётную площадь?



2.4.5. [Mpr — 2013.6.4] 13 детей сели за круглый стол и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребёнок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков было за столом?

2.4.6. [Mpr — 1991.6.4;7.2] Подпольный миллионер Тарас Артёмов пришёл в Госбанк, чтобы обменять несколько 50- и 100-рублёвых купюр старого образца. Ему была выдана 1991 купюра более мелкого достоинства[1], причём среди них не было 10-рублёвых. Докажите, что его обсчитали.

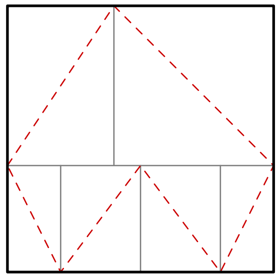
2.4.7. [Mpr — 2002.7.3] В написанном на доске примере на умножение хулиган Петя исправил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример и объясните, как Вы это сделали.

2.4.8. [Mpr — 2000.7.4] Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных чётных чисел?

2.4.9. [Ust — 2009.7.4] В школе 450 учеников и 225 парт. Ровно половина девочек сидят за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

[1] В то время имели хождение купюры по 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей (нового образца).

2.4.10. [Mpr — 2013.6.5] Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. Вот как устроен Малый остров, где всего 6 графств (см. рисунок). Нарисуйте, как может быть устроен Большой остров, если на нём нечётное число графств. Сколько графств у вас получилось?



2.4.11. [Mpr — 2010.6.6] На краю круглого вращающегося стола через равные промежутки стояли 30 чашек с чаем. Мартовский Заяц и Соня сели за стол и стали пить чай из каких-то двух чашек (не обязательно соседних). Когда они допили чай, Заяц повернул стол так, что перед каждым опять оказалось по полной чашке. Когда и эти чашки опустели, Заяц снова повернул стол (возможно, на другой угол), и снова перед каждым оказалась полная чашка. И так продолжалось до тех пор, пока весь чай не был выпит. Докажите, что если бы Заяц всегда поворачивал стол так, чтобы его новая чашка стояла через одну от предыдущей, то им бы тоже удалось выпить весь чай (т. е. тоже каждый раз обе чашки оказывались бы полными).

2.4.12. [Ust — 2006.7.7] Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рисунок). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

2.5 Делимость

2.5.1. [Mpr — 2016.6.1] У Незнайки есть пять карточек с цифрами: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ и $\boxed{5}$. Помогите ему составить из этих карточек два числа — трёхзначное и двузначное — так, чтобы первое число делилось на второе.

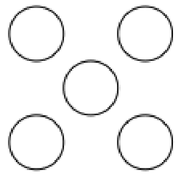
2.5.2. [Ust — 2014.6.1] Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A?

2.5.3. [Ust — 2018.6.1] Каждый день баран учит одинаковое количество языков. К вечеру своего дня рождения он знал 1000 языков. В первый день того же месяца он знал к вечеру 820 языков, а в последний день этого месяца — 1100 языков. Когда у барана день рождения?

19 февраля

2.5.4. [Ust — 2013.7.1] Астролог считает, что 2013 год *счастливый*, потому что 2013 нацело делится на сумму $20 + 13$. Будет ли когда-нибудь два счастливых года подряд?

2.5.5. [Mpr — 2015.6.2] а) Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках — в 5 раз меньше суммы остальных цифр.



б) Докажите, что задача имеет единственное решение.

2.5.6. [Mpr — 2018.7.2] Использовав каждую из цифр от 0 до 9 ровно по разу, запишите 5 ненулевых чисел так, чтобы каждое делилось на предыдущее.

2.5.7. [Ust — 2002.7.2] Существуют ли такие цифры Г и У, что число УГУ делится на 13, а число ГУГ — не делится?

2.5.8. [Mpr — 2012.6.3] Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

2.5.9. [Mpr — 2008.6.3] На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причём все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?

2.5.10. [Mpr — 2010.7.3] Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но всё же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

2.5.11. [Mpr — 2006.7.4] Год проведения нынешнего математического праздника делится на его номер: $2006 : 17 = 118$.

а) Назовите первый номер матпраздника, для которого это тоже было выполнено.

б) Назовите последний номер матпраздника, для которого это тоже будет выполнено.

2.5.12. [Ust — 2018.7.4] Дан прямоугольный параллелепипед, у которого все измерения (длина, ширина и высота) — целые числа. Известно, что если длину и ширину увеличить на 1, а высоту уменьшить на 2, то объём параллелепипеда не изменится. Докажите, что какое-то из измерений данного параллелепипеда кратно трём.

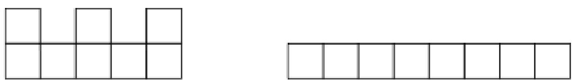
2.5.13. [Ust — 2004.7.5] Среди некоторых 13 последовательных натуральных чисел 7 чётных и 5 кратных трём. Сколько среди них чисел, кратных 6?

2.5.14. [Mpr — 2017.7.5] Можно ли так расставить цифры $1, 2, \ldots, 8$ в клетках

а) буквы Ш;

б) полоски (см. рисунок),

чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой? (Резать можно только по границам клеток. В каждой клетке должна стоять одна цифра, каждую цифру можно использовать только один раз.)



а) б)

2.5.15. [Ust — 2005.7.7] Докажите, что сумма цифр числа, делящегося на 7, может быть равна любому натуральному числу, кроме единицы.

2.5.16. [Ust — 2011.7.8] Последовательные натуральные числа 2 и 3 делятся на последовательные нечётные числа 1 и 3 соответственно; числа 8, 9 и 10 — делятся на 1, 3 и 5 соответственно. Найдутся ли 11 последовательных натуральных чисел, которые делятся на 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и 21 соответственно?

2.6 Признаки делимости

2.6.1. [Mpr — 2004.7.1] Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

2.6.2. [Mpr — 2002.6.3] На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

2.6.3. [Mpr — 2003.7.3] Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

2.6.4. [Mpr — 2018.6.4] Учительница написала на доске двузначное число и спросила Диму по очереди, делится ли оно на 2? на 3? на 4? ... на 9? На все восемь вопросов Дима ответил верно, причём ответов «да» и «нет» было поровну.

а) Можете ли вы теперь ответить верно хотя бы на один из вопросов учительницы, не зная самого числа?

б) А хотя бы на два вопроса?

2.6.5. [Arh — 2016.4] Известно, что сумма $\mathtt{ТУРНИР}+\mathtt{АРХИМЕДА}$ кратна 2016. Докажите, что сумма $\mathtt{ИР}+\mathtt{АР}$ кратна 9. (Цифры заменены буквами: разные цифры — разными буквами, одинаковые цифры — одинаковыми буквами)

2.6.6. [Mpr — 1995.7.5] Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?

2.6.7. [Mpr — 2011.7.5] В справочнике «Магия для чайников» написано:

> Замените в слове `ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ` одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение? (Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя.)

2.7 Простые числа

2.7.1. [Mpr — 2013.6.1] Вася умножил некоторое число на 10 и получил простое число. А Петя умножил то же самое число на 15, но всё равно получил простое число. Может ли быть так, что никто из них не ошибся?

2.7.2. [Mpr — 2001.7.1] В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

2.7.3. [Mpr — 2017.6.2] На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, то есть делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

2.7.4. [Ust — 2008.7.3] Мальвина попросила Буратино выписать все девятизначные числа, составленные из различных цифр. Буратино забыл, как пишется цифра 7, поэтому записал только те девятизначные числа, в которых этой цифры нет. Затем Мальвина предложила ему вычеркнуть из каждого числа по шесть цифр так, чтобы оставшееся трёхзначное число было простым. Буратино тут же заявил, что это возможно не для всех записанных чисел. Прав ли он?

2.7.5. [Ust — 2015.7.4] Незнайка хочет записать по кругу 2015 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Знайка утверждает, что это невозможно. Прав ли Знайка?

2.7.6. [Ust — 2005.6.6] Является ли простым число 1111112111111?

2.8 Основная теорема арифметики

2.8.1. [Mpr — 1995.7.1] Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

2.8.2. [Mpr — 2008.7.1] Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите это число.

2.8.3. [Ust — 2009.7.1] Юра записал четырёхзначное число. Лёня прибавил к первой цифре этого числа 1, ко второй 2, к третьей 3 и к четвёртой 4, а потом перемножил полученные суммы. У Лёни получилось 234. Какое число могло быть записано Юрой?

2.8.4. [Ust — 2015.6.2] Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

2.8.5. [Mpr — 1999.6.2] Укажите пять целых положительных чисел, сумма которых равна 20, а произведение — 420.

2.8.6. [Mpr — 2007.6.2;7.2] В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

2.8.7. [Ust — 2016.6.2] Есть четыре карточки с цифрами: 2, 0, 1, 6. Для каждого из чисел от 1 до 9 можно из этих карточек составить четырёхзначное число, которое кратно выбранному однозначному. А в каком году такое будет в следующий раз?

2.8.8. [Ust — 2019.6.5;7.4] В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменок соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки — произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья — 5, Сол — 12, Джессика — 24, Акийо — 54, Михо — 64, Петра — 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

2.8.9. [Mpr — 2009.7.6] Используя в качестве чисел любое количество монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей, а также (бесплатные) скобки и знаки четырёх арифметических действий, составьте выражение со значением 2009, потратив как можно меньше денег.

2.8.10. [Mpr — 1996.7.6] Произведение последовательных чисел от 1 до n называется *n-факториал* и обозначается $n!$ ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$). Можно ли вычеркнуть из произведения

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 100!$$

один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

2.9 НОД и НОК

2.9.1. [Ust — 2003.7.3] На каждом километре между сёлами Марьино и Рощино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Марьино, на другой — расстояние до Рощино. Гуляя по этой дороге, Бобик для каждой таблички подсчитал наибольший общий делитель записанных на ней чисел. Оказалось, что среди полученных им чисел встретились только 1, 3 или 5 (каждое хотя бы по одному разу). Найдите расстояние между сёлами.

2.9.2. [Ust — 2012.7.4] Назовём натуральные числа a и b *друзьями*, если их произведение является точным квадратом. Докажите, что если a — друг b, то a — друг НОД(a, b).

2.10 Деление с остатком

2.10.1. [Ust — 2013.6.1] В ряд лежат 1000 конфет. Сначала Вася съел девятую конфету слева, после чего съедал каждую седьмую конфету, двигаясь вправо. После этого Петя съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем съедал каждую девятую из них, также двигаясь вправо. Сколько конфет после этого осталось?

2.10.2. [Mpr — 1998.7.5] На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

2.10.3. [Arh — 2018.6] Али-Баба хочет попасть в пещеру с сокровищами. Вход в пещеру откроется, если Али-Баба расставит числа от 1 до 25 в кодовой таблице 5×5 (по одному числу в каждую клеточку) так, чтобы сумма чисел внутри любого «зигзага» из четырёх клеток (рис. 1) была кратна 5.

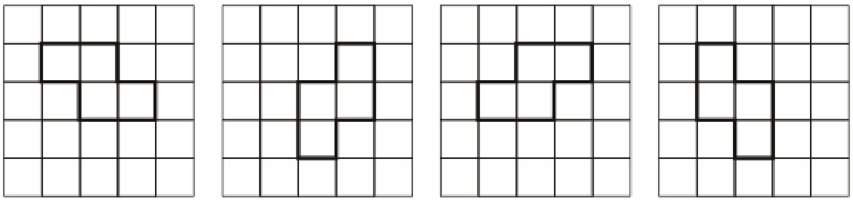


Рис. 1

А) Сможет ли он войти?

Б) Изменится ли ответ, если потребовать, чтобы сумма чисел внутри любой «полоски» из четырех клеток (рис. 2) была кратна 5?

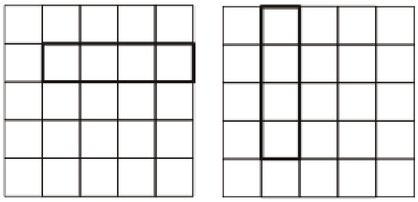


Рис. 2

2.11 Дроби

2.11.1. [Ust — 2018.7.1] Объём бутылки кваса — 1,5 литра. Первый выпил половину бутылки, второй – треть того, что осталось после первого, третий — четверть оставшегося от предыдущих, и так далее, четырнадцатый — пятнадцатую часть оставшегося. Сколько кваса осталось в бутылке?

0,1 л

2.11.2. [Mpr — 2003.7.1] Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6009} = 2003.$$

2.11.3. [Mpr — 1999.7.1] Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит $1/3$. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

2.11.4. [Ust — 2012.7.1] Записаны шесть положительных несократимых дробей, сумма числителей которых равна сумме их знаменателей. Паша перевёл каждую из неправильных дробей в смешанное число. Обязательно ли найдутся два числа, у которых одинаковы либо целые части, либо дробные части?

2.11.5. [Mpr — 1997.6.2] В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}\,.$$

Один из знаменателей здесь заменён буквой x. Найдите этот знаменатель.

2.11.6. [Mpr — 2000.7.2] Карлсон написал дробь 10/97. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно; 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь,

а) равную 1/2?

б) равную 1?

2.11.7. [Mpr — 2004.6.3] а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (то есть заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа.

2.11.8. [Mpr — 2004.7.3] На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причём их числители — различные натуральные числа. Оказалось, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей.

2.11.9. [Ust — 2016.7.3] Мальвина записала по порядку 2016 обыкновенных правильных дробей: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, … (в том числе и сократимые). Дроби, значение которых меньше чем 1/2, она покрасила в красный цвет, а остальные дроби — в синий. На сколько количество красных дробей меньше количества синих?

2.11.10. [Mpr — 2016.7.4] Впишите вместо звёздочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным:

$$\frac{*}{*} + \frac{*}{*} = \frac{*}{*}\,.$$

2.11.11. [Ust — 2017.6.5] Можно ли в равенстве

$$\frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} = *$$

заменить звездочки цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, так, чтобы равенство стало верным?

Глава 3

Текстовые задачи

3.1 Движение

3.1.1. [Mpr — 2005.6.1] Таракан Валентин объявил, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Ему не поверили, и правильно: на самом деле Валентин всё перепутал и думал, что в метре 60 сантиметров, а в минуте 100 секунд. С какой скоростью (в «нормальных» м/мин) бегает таракан Валентин?

18 м/мин

3.1.2. [Ust — 2010.6.2] Папа, Маша и Яша идут в школу. Пока папа делает 3 шага, Маша делает 5 шагов. Пока Маша делает 3 шага, Яша делает 5 шагов. Маша и Яша посчитали, что вместе они сделали 400 шагов. Сколько шагов сделал папа?

90

3.1.3. [Mpr — 2007.7.1] Даша и Таня живут в одном подъезде. Даша живёт на 6 этаже. Выходя от Даши, Таня пошла не вниз, как ей было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Таня поняла свою ошибку и пошла вниз на свой этаж. Оказалось, что Таня прошла в полтора раза больше, чем если бы она сразу пошла вниз. Сколько этажей в доме?

7

3.1.4. [Arh — 2016.2] Однажды утром в 9:00 из деревни Федино в деревню Екатериновка вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Екатериновки выехала велосипедистка Катя. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Катя встретились?

10 часов 20 мин

3.1.5. [Arh — 2019.2] Два пеших посыльных отправились из штаба армии в дальние гарнизоны с пакетами: один — на юг, а другой — через 15 мин после первого — на север. Еще через 15 мин начальник штаба понял, что забыл вложить в пакеты письма и послал велосипедиста исправить ошибку. Догнав посыльного, велосипедист мгновенно передаёт письмо, мгновенно разворачивается и едет обратно. Скорости посыльных постоянны и равны, а скорость велосипедиста в 2 раза больше. Через какое наименьшее время велосипедист может выполнить приказ и вернуться в штаб?

2 часа 30 минут

3.1.6. [Arh — 2014.2] (*Старинная задача*) Ротная колонна движется по направлению к штабу со скоростью 6 км/час. В 9:00 командир роты отправил почтового голубя с донесением в штаб. Голубь доставил донесение, сразу полетел обратно и вернулся в колонну. В какое время голубь долетел до штаба, если его скорость равна 10 км/час, а вернулся он в 9:45?

В 9 часов 36 минут

3.1.7. [Mpr — 2018.6.3] Автобусная остановка B расположена на прямолинейном шоссе между остановками A и C. Через некоторое время после выезда из A автобус оказался в такой точке шоссе, что расстояние от неё до одной из трёх остановок равно сумме расстояний до двух других. Ещё через такое же время автобус снова оказался в точке с таким свойством, а ещё через 25 минут доехал до B. Сколько времени требуется автобусу на весь путь от A до C, если его скорость постоянна, а на остановке B он стоит 5 минут?

3 часа

3.1.8. [Arh — 2012.3] Вася и Коля плавают в бассейне по соседним дорожкам. Стартуют они одновременно с противоположных концов бассейна, «встречаются» и плывут дальше. Доплыв до конца дорожки, они мгновенно разворачиваются, опять «встречаются» и так далее. Вася проплывает дорожку за 5 мин, а Коля за 7 мин. Через какое время после старта Вася впервые догонит Колю, плывя с ним в одном направлении?

Через 17,5 минут

3.1.9. [Arh — 2018.3] Обычно Борис выезжает на машине на работу в 9:00, а в 9:30 встречает на шоссе маршрутку. Сегодня Борис проспал и выехал на работу в 9:20, но вновь встретил ту же маршрутку. В какое время произошла встреча, если машина Бориса ездит в полтора раза быстрее маршрутки? (Маршрутка ходит по расписанию с постоянной скоростью, на шоссе нигде не останавливается.)

9:42

3.1.10. [Arh — 2017.3] Между Лисьей норой и Птичьим двором прямая дорога. Лиса направляется на Птичий двор, а оттуда одновременно навстречу ей и с той же скоростью выбегает Пёс. Пёс, почуяв Лису на расстоянии 100 м, побежит за ней с утроенной скоростью. Лиса, почуяв Пса на расстоянии 60 м, побежит от него с удвоенной скоростью. Сможет ли Лиса скрыться в норе, если от Птичьего двора до Лисьей норы 300 м?

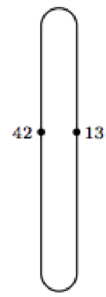
3.1.11. [Mpr — 2008.7.3] Дима живет в девятиэтажном доме. Он спускается на лифте со своего этажа на первый за 1 минуту. Из-за маленького роста Дима не достаёт до кнопки своего этажа. Поэтому, поднимаясь наверх, он нажимает ту кнопку, до которой может дотянуться, а дальше идёт пешком. Весь путь наверх занимает 1 минуту 10 секунд. Лифт движется вверх и вниз с одинаковой скоростью, а Дима поднимается вдвое медленнее лифта. На каком этаже живет Дима?

На седьмом

3.1.12. [Mpr — 1992.6.4;7.5] Петя и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил её на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Витя побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успеет раньше, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

Если $v > 2u$, то одновременно; иначе — Витя

3.1.13. [Ust — 2015.6.4] Кабинки горнолыжного подъёмника занумерованы подряд числами от 1 до 99. Игорь сел в кабинку №42 подъёмника у подножия горы и в какой-то момент заметил, что он поравнялся с движущейся вниз кабинкой №13 (см. рисунок), а через 15 секунд его кабинка поравнялась с кабинкой №12. Через какое время Игорь прибудет на вершину горы?



Через 17 минут 15 секунд

3.1.14. [Ust — 2010.6.5;7.3] Одноклассники Аня, Боря и Вася живут на одной лестничной клетке. В школу они идут с постоянными, но различными скоростями, не оглядываясь и не дожидаясь друг друга. Но если кто-то из них успевает догнать другого, то дальше он замедляется, чтобы идти вместе с тем, кого догнал.

Однажды первой вышла Аня, вторым Боря, третьим Вася, и какие-то двое из них пришли в школу вместе. На следующий день первым вышел Вася, вторым Боря, третьей Аня. Могут ли все трое прийти в школу вместе?

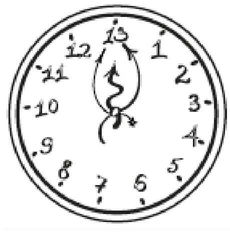
3.1.15. [Mpr — 2012.7.4] На каждом из двух рукавов реки за километр до их слияния стоит по пристани, а ещё одна пристань стоит в двух километрах после слияния (см. рисунок). Лодка добралась от одной из пристаней до другой (неизвестно, какой) за 30 минут, от другой до третьей за 18 минут. За сколько минут она может добраться от третьей пристани до первой? (Скорость течения реки постоянна и одинакова во всех её частях. Собственная скорость лодки также постоянна.)

24 или 72

3.1.16. [Mpr — 1999.7.4] Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шёл с постоянной скоростью. Один шёл из A в B, другой — из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один — в B в 4 часа вечера, а другой — в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

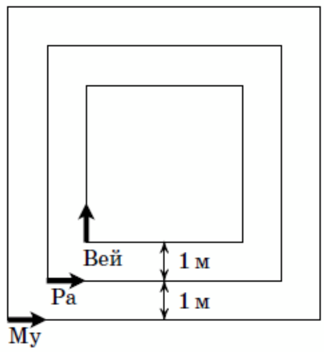
В 6 часов утра

3.1.17. [Ust — 2011.6.7] Марсиане делят сутки на 13 часов. После того, как *Марсовский Заяц* уронил часы в чай, у них изменилась скорость вращения секундной стрелки, а скорость вращения других стрелок осталась прежней. Известно, что каждую полночь все три стрелки совпадают. Сколько всего за сутки может быть таких моментов времени, когда три стрелки совпадут? Найдите все возможные ответы.



12, 6, 4, 3, 2, 1

3.1.18. [Mpr — 2013.7.5] Три квадратные дорожки с общим центром отстоят друг от друга на 1 м (см. рис.). Три муравья стартуют одновременно из левых нижних углов дорожек и бегут с одинаковой скоростью: Му и Ра против часовой стрелки, а Вей по часовой. Когда Му добежал до правого нижнего угла большой дорожки, двое других, не успев ещё сделать полного круга, находились на правых сторонах своих дорожек, и все трое оказались на одной прямой. Найдите стороны квадратов.



4 м, 6 м, 8 м

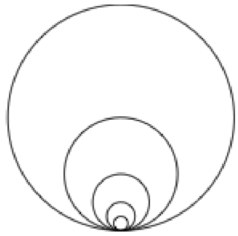
3.1.19. [Ust — 2005.7.5] Папа по реке доплывает от моста до пляжа за 9 минут, а от пляжа до моста — за 12 минут. Сын же от моста до пляжа доплывает за 12 минут. Сколько времени нужно сыну, чтобы доплыть от пляжа до моста?

18 минут

3.1.20. [Mpr — 2004.7.6] Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зелёным и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость)?

За 24 минуты

3.1.21. [Ust — 2006.7.8] Лабиринт состоит из пяти окружностей (см. рисунок). Длины окружностей равны 10, 20, 40, 80 и 160 метров. По лабиринту с постоянной скоростью начинает ходить человек, который обходит все его окружности по часовой стрелке в порядке возрастания их длин.



Пройдя самую большую окружность, он переходит на самую маленькую и начинает всё сначала. Через некоторое время по лабиринту начинает ходить ещё один человек, который ходит с той же скоростью и по тому же плану, что и первый, но обходит окружности против часовой стрелки. Докажите, что эти два человека обязательно встретятся.

3.1.22. [Ust — 2009.7.9] Пончик закусывал в придорожном кафе, когда мимо него проехал автобус. Через три плюшки после автобуса мимо Пончика проехал мотоцикл, а ещё через три плюшки — автомобиль. Мимо Сиропчика, который закусывал в другом кафе у той же дороги, они проехали в другом порядке: сначала — автобус, через три плюшки — автомобиль, а ещё через три плюшки — мотоцикл. Известно, что Пончик и Сиропчик всегда едят плюшки с одной и той же постоянной скоростью. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля — 60 км/ч, а скорость мотоцикла — 30 км/ч.

40 км/ч

3.2 Работа

3.2.1. [Mpr — 1992.6.1] Три землекопа за два часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

15

3.2.2. [Mpr — 1992.7.1] Три землекопа за три часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

10

3.2.3. [Mpr — 1993.6.2] Мосметрострой нанял двух землекопов для рытья туннеля. Один из них может за час прокопать вдвое больше, чем другой, а платят по договору каждому одинаково за каждый час работы. Что обойдётся дешевле — совместная работа землекопов с двух сторон до встречи или поочерёдное рытьё половины туннеля каждым из землекопов?

Совместная работа дешевле

3.2.4. [Mpr — 2012.6.2] Пазл Пете понравился, он решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе два куска (начальных или ранее склеенных). В результате весь пазл соединился в одну цельную картину за 2 часа. За какое время собралась бы картина, если бы Петя склеивал вместе за минуту не по два, а по три куска?

За час

3.2.5. [Ust — 2004.7.3] Известно, что маляр, будучи в хорошем настроении, работает вдвое медленнее, чем будучи в плохом. В первую неделю он покрасил на 300 метров забора больше, чем во вторую, потому что во вторую неделю грустил на два дня больше, чем в первую. Сколько метров забора в день красит грустный маляр?

3.2.6. [Arh — 2013.3] Сразу после завтрака (в 8:00) папа и сын выходят за водой и начинают наполнять пустой бак. Папа приносит ведро через каждые 3 минуты, а сын — через каждые 4 минуты. Как только вода попадает в бак, включается насос, который забирает воду для полива с постоянной скоростью 1 ведро за 12 минут. Укажите время, когда в баке окажется ровно 13 вёдер воды.

8 часов 27 минут

3.2.7. [Mpr — 2007.7.3] У Алёны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алёна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алёна говорила по телефону ровно половину времени поездки?

11 часов 40 минут

3.2.8. [Ust — 2011.6.6] Малыш и Карлсон съели бочку варенья и корзину печенья, начав и закончив одновременно. Сначала Малыш ел печенье, а Карлсон — варенье, потом (в какой-то момент) они поменялись. Карлсон и варенье, и печенье ел в три раза быстрее Малыша. Какую часть варенья съел Карлсон, если печенья они съели поровну?

0,9

3.2.9. [Ust — 2009.6.7] В трюме корабля образовалась течь. Сразу же включили насос, откачивающий воду, однако он не справлялся, и через 10 минут уровень воды в трюме поднялся на 20 см. Тогда включили второй насос такой же мощности, и через 5 минут уровень опустился на 10 см. Тут течь заделали. За какое время насосы откачают остаток воды?

За $5/4$ минуты

3.3 Стоимость

3.3.1. [Mpr — 2004.6.2] Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины?

160

3.3.2. [Mpr — 2001.6.2] Офеня[1] купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя Офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

2.50

3.3.3. [Mpr — 1995.7.2]

Один сапфир и два топаза
ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз
его ценнее в восемь раз.
Определить мы просим Вас,
сапфир ценнее иль топаз?

Ценности равны

[1] Продавец вразнос, коробейник

3.3.4. [Mpr — 1992.7.2] В январе на 1 доллар можно было купить 40 винтиков или 60 шпунтиков. В феврале винтики и шпунтики стали продавать наборами из 25 винтиков и 25 шпунтиков по цене 1 доллар за набор. Для сборки трактора необходимо 600 винтиков и 600 шпунтиков. В каком месяце сборка трактора стоила дороже, если другие затраты не изменились?

$\boxed{\text{В январе}}$

3.3.5. [Mpr — 1993.7.5] Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7000000 рублей. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 рублей за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 рубль). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир. При этом он заметил, что и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки выросли в два раза. Затем он снова выпил весь кефир, сдал бутылки, на все вырученные деньги снова купил кефир и т. д. При этом между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Гулливер?

$\boxed{1166666}$

3.3.6. [Ust — 2018.6.7;7.7] Цена стандартного обеда в таверне «Буратино» зависит только от дня недели. Аня обедала 10 дней подряд, начиная с 10 июля, и заплатила 70 сольдо. Ваня также заплатил 70 сольдо за 12 обедов, начиная с 12 июля. Таня заплатила 100 сольдо за 20 обедов, начиная с 20 июля. Сколько заплатит Саня за 24 обеда, начиная с 24 июля?

$\boxed{\text{150 сольдо}}$

3.4 Части и отношения

3.4.1. [Mpr — 2014.6.1;7.1] Дети ходили в лес по грибы. Если Аня отдаст половину своих грибов Вите, у всех детей станет поровну грибов, а если вместо этого Аня отдаст все свои грибы Саше, то у Саши станет столько же грибов, сколько у всех остальных вместе взятых. Сколько детей ходило за грибами?

$\boxed{6}$

3.4.2. [Mpr — 2011.6.1] «А это вам видеть пока рано», — сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!» Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что видеть пока рано?

$\boxed{22}$

3.4.3. [Mpr — 2010.6.1] На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?

$\boxed{21}$

3.4.4. [Mpr — 2007.6.1] По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше?

$\boxed{\text{На первом канале}}$

3.4.5. [Mpr — 1995.6.1] После того как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

$\boxed{\text{На одну четверть}}$

3.4.6. [Ust — 2008.6.1] Винни-Пух, Пятачок, Кролик и ослик Иа-Иа опустошили бочонок мёда. При этом Пятачок съел половину того, что съел Винни-Пух, Кролик — половину того, что не съел Винни-Пух, а ослику Иа-Иа досталась лишь десятая часть бочонка. Какая часть бочонка досталась Кролику?

$\boxed{3/10}$

3.4.7. [Mpr — 2006.7.1] Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Какая часть торта была вначале у Пуха и какая у Пятачка?

$\boxed{\frac{6}{7} \text{ и } \frac{1}{7}}$

3.4.8. [Mpr — 1992.6.2] На Нью-Васюковской валютной бирже за 11 тугриков дают 14 динаров, за 22 рупии — 21 динар, за 10 рупий — 3 талера, а за 5 крон — 2 талера. Сколько тугриков можно выменять за 13 крон?

$\boxed{13}$

3.4.9. [Mpr — 2016.6.2;7.2] В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На кольце есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка — через Зоопарк или не через Зоопарк — короче и во сколько раз?

$\boxed{\text{Второй короче в 11 раз}}$

3.4.10. [Mpr — 2015.7.2] В аквариуме живёт три вида рыбок: золотые, серебряные и красные. Если кот съест всех золотых рыбок, то рыбок станет на 1 меньше, чем 2/3 исходного числа. Если кот съест всех красных рыбок, то рыбок станет на 4 больше, чем 2/3 исходного числа. Каких рыбок — золотых или серебряных — больше и на сколько?

$\boxed{\text{Серебряных на две больше}}$

3.4.11. [Mpr — 2009.7.2] На каждом из двух огородов Дед посадил по одинаковому количеству репок. Если в огород заходит Внучка, то она выдёргивает ровно 1/3 репок, имеющихся к этому моменту. Если заходит Жучка, то она выдёргивает 1/7 репок, а если заходит Мышка, то она выдёргивает только 1/12 репок. К концу недели на первом огороде осталось 7 репок, а на втором — 4. Заходила ли Жучка во второй огород?

Да

3.4.12. [Mpr — 2007.6.3] Волк с тремя поросятами написал детектив «Три поросёнка–2», а потом вместе с Красной Шапочкой и её бабушкой — кулинарную книгу «Красная Шапочка–2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросёнку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между её авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

700 золотых монет

3.4.13. [Mpr — 2001.6.4] Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

3.4.14. [Ust — 2010.7.4] Просыпаясь каждое утро в 8:30, истопник набивает печку углём до упора. При этом он кладёт ровно 5 кг угля. Каждый вечер, ложась спать (а ложится спать он также в одно и то же время), он опять набивает печку углём до упора и кладёт при этом ровно 7 кг угля. В какое время истопник ложится спать?

В 22:30

3.4.15. [Mpr — 1997.7.5] В тесте к каждому вопросу указаны 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удаётся списать, он отвечает правильно, а в противном случае — наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на 1/5 часть). Всего двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

3/8

3.4.16. [Mpr — 2012.7.5] Вася написал верное утверждение:

«В этой фразе 1/3 всех цифр — цифры 3, а 1/2 всех цифр — цифры 1».

А Коля написал фразу:

«В этой фразе 1/... всех цифр — цифры *, доли цифр * и * одинаковы и равны 1/..., а доля всех остальных цифр составляет 1/...».

Вставьте вместо звёздочек три разные цифры, а вместо многоточий — три разных числа так, чтобы получилось верное утверждение.

1/2 всех цифр — цифры 1, доли цифр 2 и 5 одинаковы и равны 1/5, доля остальных цифр 1/10

3.5 Проценты

3.5.1. [Ust — 2015.7.1] Три пирата делили мешок монет. Первый забрал 3/7 всех монет, второй — 51% остатка, после чего третьему осталось на 8 монет меньше, чем получил второй. Сколько монет было в мешке?

$\boxed{700}$

3.5.2. [Mpr — 1994.7.1] За два года завод снизил объём выпускаемой продукции на 51%. При этом каждый год объём выпускаемой продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

$\boxed{\text{На } 30\%}$

3.5.3. [Mpr — 1996.6.2] Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше Алика собрал грибов Вася?

$\boxed{\text{На } 50\%}$

3.5.4. [Ust — 2004.6.2] Одно число увеличили на 2%, а другое — на 3%. Могла ли сумма увеличиться на 5%? (Числа считаются положительными.)

3.5.5. [Mpr — 2009.6.3] В парке росли липы и клёны. Клёнов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего клёнов стало 20%. А осенью посадили клёны, и клёнов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?

$\boxed{\text{В шесть раз}}$

3.5.6. [Arh — 2015.2] На завтрак Малыш и Карлсон ели конфеты, причем Карлсон съел все свои конфеты, а Малыш только 20% своих конфет. Известно, что вместе они съели 80% всех конфет, имевшихся у них до завтрака. У кого из них до завтрака было больше конфет и во сколько раз?

$\boxed{\text{У Карлсона больше в три раза}}$

3.5.7. [Arh — 2011.2] У Феди в дневнике на 10% больше двоек, чем у Лизы. Федя исправил 10% своих двоек, а Лиза — 1% своих. У кого из них осталось больше неисправленных двоек?

$\boxed{\text{Поровну}}$

3.5.8. [Mpr — 2001.7.2] Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха — уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?

$\boxed{\text{Да}}$

3.5.9. [Mpr — 1998.7.2] В банановой республике прошли выборы в парламент, в котором участвовали все жители. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% жителей любят мандарины?

$\boxed{40\%}$

3.5.10. [Mpr — 1991.7.3] В начале года винтики, шпунтики и гаечки продавались по одинаковой цене 1 рубль за 1 кг. 27 февраля Верховный Совет СССР принял закон о повышении цены на винтики на 50% и снижении цены на шпунтики на 50%. 28 февраля Верховный Совет РСФСР принял закон о снижении цены на винтики на 50% и повышении цены на шпунтики на 50%. Какой товар будет самым дорогим и какой самым дешёвым в марте?

3.5.11. [Ust — 2014.7.4] В начале года в 7 классе учились 25 человек. После того как туда пришли семеро новеньких, процентный состав отличников увеличился на 10 (если в начале года он был a%, то теперь — $(a + 10)$%). Сколько теперь отличников в классе?

3.5.12. [Ust — 2008.7.6] Толстый выпуск газеты стоит 30 рублей, а тонкий — дешевле. Для пенсионеров установлена скидка на одно и то же количество процентов на все газеты, поэтому тонкий выпуск той же газеты они покупают за 15 рублей. Известно, что в любом случае газета стоит целое количество рублей. Сколько стоит тонкая газета без скидки и сколько стоит толстая газета для пенсионеров?

3.5.13. [Ust — 2010.6.8] Буратино закопал на Поле Чудес два слитка — золотой и серебряный. В те дни, когда погода хорошая, золотой слиток увеличивается на 30%, а серебряный — на 20%. А в те дни, когда погода плохая, золотой слиток уменьшается на 30%, а серебряный — на 20%. Через неделю оказалось, что один из слитков увеличился, а другой уменьшился. Сколько дней была хорошая погода?

4

3.5.14. [Ust — 2014.6.8] Вася положил некую сумму в рублях в банк под 20% годовых. Петя взял другую сумму в рублях, перевёл её в доллары и положил в банк под 10% годовых. За год цена одного доллара в рублях увеличилась на 9,5%. Когда через год Петя перевёл свой вклад в рубли, то оказалось, что за год Вася и Петя получили одинаковую прибыль. У кого первоначально была сумма больше — у Васи или у Пети?

У Васи

3.6 Смеси и концентрации

3.6.1. [Ust — 2005.6.5] Буфетчик делает молочно-вишнёвый коктейль, смешивая в миксере молоко и вишнёвый сок. Молоко стоит 20 рублей за литр, а вишнёвый сок — 30 рублей за литр. Известно, что стоимость молока, заливаемого в миксер, равна стоимости сока, заливаемого в миксер. Сколько стоит литр молочно-вишнёвого коктейля?

24 рубля

3.7 Неравенства

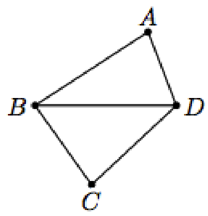
3.7.1. [Ust — 2003.6.1] Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?

3.7.2. [Ust — 2017.6.1;7.1] В Стране дураков ходят монеты в 1, 2, 3, …, 19, 20 сольдо (других нет). У Буратино была одна монета. Он купил мороженое и получил одну монету сдачи. Снова купил такое же мороженое и получил сдачу тремя монетами разного достоинства. Буратино хотел купить третье такое же мороженое, но денег не хватило. Сколько стоит мороженое?

3.7.3. [Mpr — 2018.6.2] Незнайка выписал семь двузначных чисел в порядке возрастания. Затем одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось вот что: ХА, АЙ, АХ, ОЙ, ЭМ, ЭЙ, МУ. Докажите, что Незнайка что-то перепутал.

3.7.4. [Ust — 2016.7.2] В комнате у Папы Карло на каждой стене висят часы, причём они все показывают неверное время: первые часы ошибаются на 2 минуты, вторые — на 3 минуты, третьи — на 4 минуты и четвёртые — на 5 минут. Однажды Папа Карло, выходя на улицу, решил узнать точное время и увидел такие показания часов: 14:54, 14:57, 15:02 и 15:03. Помогите Папе Карло определить точное время.

3.7.5. [Ust — 2012.7.2] На карте обозначены 4 деревни: A, B, C и D, соединённые тропинками (см. рисунок). В справочнике указано, что на маршрутах $A-B-C$ и $B-C-D$ есть по 10 колдобин, на маршруте $A-B-D$ колдобин 22, а на маршруте $A-D-B$ колдобин 45. Туристы хотят добраться из A в D так, чтобы на их пути было как можно меньше колдобин. По какому маршруту им надо двигаться?



3.7.6. [Mpr — 2006.6.3] Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в 10-м подъезде в квартире № 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

3.7.7. [Mpr — 2001.6.3] Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Этой коробки Наташе хватило на 41 чашку чая, а Инне — на 58. Сколько пакетиков было в коробке?

3.7.8. [Mpr — 1997.6.3;7.4] В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

3.7.9. [Ust — 2014.6.3] На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у россиян, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

3.7.10. [Ust — 2011.6.3] Волшебным считается момент, в который число минут на электронных часах совпадает с числом часов. Чтобы сварить волшебное зелье, его надо и поставить на огонь, и снять с огня в волшебные моменты. А чтобы оно получилось вкусным, его надо варить от полутора до двух часов. Сколько времени варится вкусное волшебное зелье?

1 час 38 минут

3.7.11. [Ust — 2006.6.3] Пятеро друзей скинулись на покупку. Может ли оказаться так, что любые два друга в сумме внесли менее трети стоимости покупки?

3.7.12. [Mpr — 2001.7.3] Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал два подъезда и добавил три этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать ещё два подъезда и добавить ещё три этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей и на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

3.7.13. [Arh — 2016.3] Вася и Петя задумали по 5 натуральных чисел, причем все 10 задуманных чисел оказались различными. Среднее арифметическое чисел Васиного набора равно наибольшему числу Петиного набора. Может ли среднее арифметическое чисел Петиного набора быть равно

а) наименьшему числу Васиного набора;

б) наибольшему числу Васиного набора?

3.7.14. [Ust — 2009.7.3] Пётр Петрович и Иван Иванович ехали вместе в поезде. Каждый из них сначала смотрел в окно, потом читал газету, потом разгадывал кроссворд и под конец пил чай. Только у Петра Петровича на каждое следующее занятие уходило вдвое больше времени, чем на предыдущее, а у Ивана Ивановича — в 4 раза. Начали смотреть в окно они одновременно и кончили пить чай также одновременно. Что делал Пётр Петрович, когда Иван Иванович приступил к кроссворду?

3.7.15. [Ust — 2016.6.4] В классе учатся 27 человек, но на урок физкультуры пришли не все. Учитель разбил пришедших на две равные по численности команды для игры в пионербол. При этом в первой команде была половина всех пришедших мальчиков и треть всех пришедших девочек, а во второй — половина всех пришедших девочек и четверть всех пришедших мальчиков. Остальные пришедшие ребята помогали судить. Сколько помощников могло быть у судьи?

3.7.16. [Ust — 2013.6.4] Если каждой девочке дать по одной шоколадке, а каждому мальчику по две, то шоколадок хватит. А если каждому мальчику дать по одной шоколадке, а каждой девочке по две, то их не хватит. А если девочкам не давать вообще, то хватит ли каждому мальчику по три шоколадки?

3.7.17. [Mpr — 2010.7.4] В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку — 18 голосов, за Кукушку и Петуха — 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

13

3.7.18. [Mpr — 1993.6.5] Дядя Фёдор, кот Матроскин, Шарик и почтальон Печкин сидят на скамейке. Если Шарик, сидящий справа от всех, сядет между дядей Фёдором и котом, то кот станет крайним слева. В каком порядке они сидят?

3.7.19. [Ust — 2008.6.5] У папы Карло есть 130 дощечек. Из 5 дощечек он может сделать игрушечную мельницу, из 7 дощечек — пароход, из 14 дощечек — самолёт. Самолёт стоит 19 золотых, пароход — 8 золотых, мельница — 6 золотых. Какое наибольшее количество золотых может заработать папа Карло?

3.7.20. [Ust — 2009.7.5] Али-Баба и 40 разбойников делят добычу. Делёж считается справедливым, если любым 30 участникам достаётся в сумме не менее половины добычи. Какая наибольшая доля может достаться Али-Бабе при справедливом дележе?

3.7.21. [Mpr — 1994.6.6] Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причём Катя выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?

3.7.22. [Ust — 2003.6.6] На каждом километре между сёлами Марьино и Рощино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано расстояние до Марьино, на другой — расстояние до Рощино. Останавливаясь у каждого столба, Бобик заметил, что если сложить все цифры, записанные на обеих сторонах таблички, то получится 13. Найдите расстояние между сёлами.

3.7.23. [Ust — 2016.6.7] Вася живет в многоквартирном доме. В каждом подъезде дома одинаковое количество этажей, на каждом этаже по четыре квартиры, каждая квартира имеет одно-, дву- или трёхзначный номер. Вася заметил, что количество квартир с двузначным номером у него в подъезде в десять раз больше количества подъездов в доме. Сколько всего квартир может быть в этом доме?

3.7.24. [Ust — 2006.6.7] Илья Муромец помнит, что на то, чтобы нейтрализовать 10-голового огнедышащего дракона, достаточно четырёх огнетушителей. А для того, чтобы нейтрализовать 16-голового дракона, достаточно семи огнетушителей. Какое наименьшее количество огнетушителей нужно для того, чтобы нейтрализовать 19-голового дракона?

3.7.25. [Ust — 2006.7.6] На спортивном празднике ученики седьмых классов парами соревновались в беге по следующим правилам. По команде два человека начинают бежать с места старта в разные стороны по круговой дорожке стадиона. Финишем считается момент их встречи. Саша и Юра пробежали круг за 45 секунд. Две Алёны начали бежать с постоянными скоростями (не обязательно равными), но, когда им оставалось пробежать полкруга, одна Алёна увеличила скорость на 25%, а другая — на 28%. Оказалось, что первые полкруга они бежали на 5 секунд больше, чем вторые полкруга. У кого лучше результат: у девочек или у мальчиков?

3.8 Разные арифметические задачи

3.8.1. [Mpr — 1996.6.1] В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Как такое может быть?

3.8.2. [Mpr — 2006.6.1] Доктор Айболит раздал четырём заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот на одну больше, чем носорог, а слон — на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придётся съесть слону?

503

3.8.3. [Ust — 2016.6.1] У Винни-Пуха пять друзей, у каждого из которых в домике есть горшочки с мёдом: у Тигры — 1, у Пятачка — 2, у Совы — 3, у Иа-Иа — 4, у Кролика — 5. Винни-Пух по очереди приходит в гости к каждому другу, съедает один горшочек мёда, а остальные забирает с собой. К последнему домику он подошёл, неся 10 горшочков с мёдом. Чей домик Пух мог посетить первым?

Любой, кроме домика Тигры

3.8.4. [Ust — 2019.7.1] Столяр распилил шахматную доску на клетки за 70 минут. За какое время он распилит такую же доску на квадраты размером 2×2 клетки? (Размеры шахматной доски — 8×8 клеток. Время распила пропорционально его длине.)

за 30 минут

3.8.5. [Mpr — 2018.7.1] В разноцветной семейке было поровну белых, синих и полосатых детей-осьминожков. Когда несколько синих осьминожков стали полосатыми, папа решил посчитать детей. Синих и белых вместе взятых оказалось 10, зато белых и полосатых вместе взятых — 18. Сколько детей в разноцветной семейке?

21

3.8.6. [Ust — 2008.7.1] После утренней пробежки Карлсон худеет на килограмм, а к вечеру (после поедания плюшек) его вес увеличивается на треть. К вечеру третьего дня (после того, как он начал бегать) Карлсон обнаружил, что поправился вдвое. Сколько он весил до того, как начал заниматься спортом?

14,8 кг

3.8.7. [Ust — 2017.6.2] Саша и Ваня родились 19 марта. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?

54

3.8.8. [Mpr — 2011.7.2] Вдоль дорожки между домиками Незнайки и Синеглазки росли в ряд цветы: 15 пионов и 15 тюльпанов вперемешку. Отправившись из дома в гости к Незнайке, Синеглазка поливала все цветы подряд. После 10-го тюльпана вода закончилась, и 10 цветов остались не политыми. Назавтра, отправившись из дома в гости к Синеглазке, Незнайка собирал для неё все цветы подряд. Сорвав 6-й тюльпан, он решил, что для букета достаточно. Сколько цветов осталось расти вдоль дорожки?

19

3.8.9. [Mpr — 2011.7.2] На завтрак группа из 5 слонов и 7 бегемотов съела 11 круглых и 20 кубических арбузов, а группа из 8 слонов и 4 бегемотов — 20 круглых и 8 кубических арбузов.

Все слоны съели поровну (одно и то же целое число) арбузов. И все бегемоты съели поровну арбузов. Но один вид животных ест и круглые, и кубические арбузы, а другой вид привередливый и ест арбузы только одной из форм. Определите, какой вид (слоны или бегемоты) привередлив и какие арбузы он предпочитает.

3.8.10. [Mpr — 2013.6.3;7.1] Пёс и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пёс откусит свой кусок и убежит, коту достанется на 300 г больше, чем псу. Если кот откусит свой кусок и убежит, псу достанется на 500 г больше, чем коту. Сколько колбасы останется, если оба откусят свои куски и убегут?

400 г

3.8.11. [Ust — 2015.6.3] В ряд стояло 10 детей. В сумме у девочек и у мальчиков орехов было поровну. Каждый ребёнок отдал по ореху каждому из стоящих правее его. После этого у девочек стало на 25 орехов больше, чем было. Сколько в ряду девочек?

5

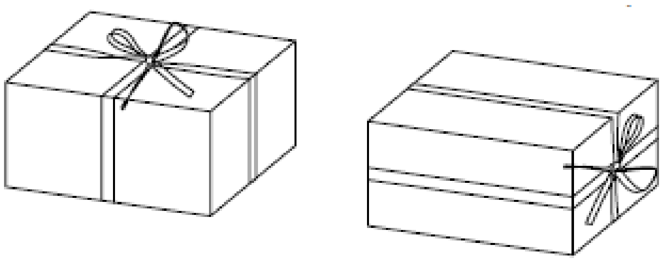
3.8.12. [Ust — 2012.6.3] Города A, B и C вместе с соединяющими их прямыми дорогами образуют треугольник. Известно, что прямой путь из A в B на 200 км короче объезда через C, а прямой путь из A в C на 300 км короче объезда через B. Найдите расстояние между городами B и C.

250 км

3.8.13. [Ust — 2019.6.3] У одноклассниц Маши и Светы одинаковое количество тетрадей. Они купили одинаковые наборы наклеек с котиками. Маша наклеила на 7 тетрадей по одному котику, а на остальные — по 7 котиков. Света наклеила на 11 тетрадей по одному котику, а на остальные — по 11 котиков. Сколько котиков было в наборе, если каждая девочка израсходовала весь набор?

77

3.8.14. [Mpr — 2012.6.4;7.3] Торт упакован в коробку с квадратным основанием. Высота коробки вдвое меньше стороны этого квадрата. Ленточкой длины 156 см можно перевязать коробку и сделать бантик сверху (как на рисунке слева). А чтобы перевязать её с точно таким же бантиком сбоку (как на рисунке справа), нужна ленточка длины 178 см. Найдите размеры коробки.



22 см × 22 см × 11 см

3.8.15. [Ust — 2003.6.5;7.2] На острове Невезения отменили понедельники: у них за воскресеньем сразу следует вторник. За последний год (то есть, с 15 декабря 2002 года по 14 декабря 2003 года) воскресенья на острове совпадали с нашими воскресеньями ровно восемь раз. Какой день недели на острове сегодня?

Суббота

3.8.16. [Arh — 2017.2] За полугодие Федя получил по математике 35 оценок. Перед самым Новым годом все двойки и тройки он пересдал: в электронном журнале двойки были исправлены на тройки, а «старые» тройки — на четвёрки. При этом количество троек осталось прежним, а средний балл вырос на 0,4. Сколько двоек было у Феди первоначально?

7

3.8.17. [Mpr — 2013.7.3] Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

10

3.8.18. [Mpr — 2018.6.5] Шесть математиков пошли на рыбалку. Вместе они наловили 100 рыб, причём все поймали разное количество. После рыбалки они заметили, что любой из них мог бы раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у остальных пятерых стало поровну рыб. Докажите, что один рыбак может уйти домой со своим уловом и при этом снова каждый оставшийся сможет раздать всех своих рыб другим рыбакам так, чтобы у них получилось поровну.

3.8.19. [Ust — 2012.6.6] Верёвочку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а затем все слои верёвочки разрезали в одном месте. Какова могла быть длина верёвочки, если известно, что какие-то два из полученных кусков имели длины 9 метров и 4 метра?

52 м, 68 м или 88 м

3.8.20. [Ust — 2004.6.6] Четыре друга участвовали в олимпиаде. Витя решил больше всех задач — восемь, а Петя меньше всех — пять задач. Каждая задача олимпиады была решена ровно тремя из друзей. Сколько задач было на олимпиаде?

3.8.21. [Mpr — 2016.6.6] Сорок детей водили хоровод. Из них 22 держали за руку мальчика и 30 держали за руку девочку. Сколько девочек было в хороводе?

24

3.8.22. [Ust — 2016.7.5] Артемон подарил Мальвине букет из аленьких цветочков и чёрных роз. У каждой чёрной розы 4 пестика и 4 тычинки, а на стебле два листка. У каждого аленького цветочка 8 пестиков и 10 тычинок, а на стебле три листка. Листков в букете на 108 меньше, чем пестиков. Сколько тычинок в букете?

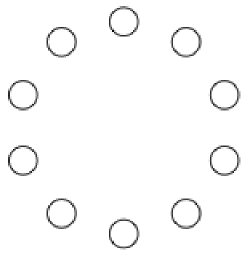
216

Глава 4

Методы рассуждений

4.1 Разбиения на пары и группы

4.1.1. [Mpr — 1998.6.3] Расположите в кружочках (вершинах правильного десятиугольника) числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме двух чисел, им противоположных (симметричных относительно центра окружности).



4.1.2. [Ust — 2015.7.3] Из натуральных чисел от 1 до 100 выбрано 50 различных. Оказалось, что сумма никаких двух из них не равна 100. Верно ли, что среди выбранных чисел всегда найдётся квадрат какого-нибудь целого числа?

4.1.3. [Arh — 2015.4] В один прекрасный день каждый из 2015 гномов обиделся на какого-то другого гнома (одного), и на каждого гнома обиделся какой-то другой гном (один). Белоснежке требуется распределить гномов на три группы так, чтобы в каждой из групп не было гномов, обиженных на кого-нибудь из данной группы. Всегда ли это возможно? Ответ обоснуйте.

4.1.4. [Ust — 2013.7.4] Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 24 карточки, пронумерованные числами от 1 до 24. Он выбирает из них 13 карточек и передает первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 11 карточек и, перемешав, передает эти три карточки второму фокуснику. Каким образом фокусники могут договориться так, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

4.1.5. [Mpr — 2009.7.4] Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, ..., или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

4.1.6. [Mpr — 2009.6.6] а) Скупой рыцарь хранит золотые монеты в шести сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну в эти два сундука. Ещё он заметил, что если открыть любые 3, 4 или 5 сундуков, то тоже можно переложить лежащие в них монеты таким образом, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга так и не узнал, можно ли разложить все монеты поровну по всем шести сундукам. Можно ли, не заглядывая в заветные сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

б) А если сундуков было восемь, а Скупой рыцарь мог разложить поровну монеты, лежащие в любых 2, 3, 4, 5, 6 или 7 сундуках?

4.2 Доказательство от противного

4.2.1. [Ust — 2019.6.4] Антон, Боря и Вова участвовали в велопробеге по шоссе Каргополь — Медвежьегорск. Они стартовали в разное время и каждый ехал с постоянной скоростью: Антон — быстрее Бори, а Боря — быстрее Вовы. В некоторых точках шоссе были установлены видеокамеры. Каждая из них фиксировала порядок прохождения участниками этой точки. Оказалось, что любой порядок, в котором могли проехать Антон, Боря и Вова, был реализован в какой-то из точек. Известно, что кто-то один из троих падал. Кто именно?

4.2.2. [Ust — 2012.6.8] Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

4.2.3. [Ust — 2005.6.8] На Всемирном конгрессе мудрецов звездочёты сидят в ряд напротив алхимиков за большим длинным столом, а во главе стола сидит Самый Почтенный Мудрец. В первый день конгресса оказалось, что напротив каждого алхимика сидит звездочёт с более длинной бородой, чем у него. На второй день алхимики договорились сесть за столом в порядке возрастания длины бороды от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Но и звездочёты договорились между собой сесть в порядке возрастания длиннобородости от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Докажите, что и во второй день напротив каждого алхимика будет сидеть звездочёт с более длинной бородой, чем у него.

4.3 Логические задачи

4.3.1. [Мpr — 2010.6.2] В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Всё моё золото я украл у Дракона.

Б: Ты лжёшь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

4.3.2. [Ust — 2011.6.2] Некоторые жители *Острова Разноцветных Лягушек* говорят только правду, а остальные всегда лгут. Трое островитян сказали так:

Бре: На нашем острове нет синих лягушек.

Ке: Бре лгун. Он же сам синяя лягушка!

Кекс: Конечно, Бре лгун. Но он красная лягушка.

Водятся ли на этом острове синие лягушки?

4.3.3. [Ust — 2005.6.2] Дом имеет форму квадрата, разделённого на девять одинаковых квадратных комнат. В каждой комнате живёт либо рыцарь, который всегда говорит только правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый житель дома заявил: «Среди моих соседей рыцарей больше, чем лжецов». Известно, что среди жителей дома есть и рыцари, и лжецы. Сколько среди них рыцарей? (Соседними считаются комнаты, имеющие общую стену.)

4.3.4. [Ust — 2003.6.2] Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?

4.3.5. [Ust — 2014.7.2] В шеренге стоят 2014 человек, и одного из них зовут Артур. Каждый из стоящих в шеренге либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый, кроме Артура, сказал: «Между мной и Артуром стоят ровно два лжеца». Сколько лжецов в этой шеренге, если известно, что Артур — рыцарь?

4.3.6. [Ust — 2013.7.2] В семье весёлых гномов папа, мама и ребёнок. Имена членов семьи: Саша, Женя и Валя. За обеденным столом два гнома сделали по два заявления. Валя: «Женя и Саша разного пола. Женя и Саша – мои родители». Саша: «Я — отец Вали. Я — дочь Жени». Восстановите имя и отчество гнома-ребёнка, если известно, что каждый гном один раз сказал правду, и один раз пошутил.

4.3.7. [Мpr — 2019.6.3] Сеня не умеет писать некоторые буквы и всегда в них ошибается. В слове ТЕТРАЭДР он сделал бы пять ошибок, в слове ДОДЕКАЭДР — шесть, а в слове ИКОСАЭДР — семь. А сколько ошибок он сделает в слове ОКТАЭДР?

4.3.8. [Ust — 2018.6.3;7.3] Трём мудрецам показали 9 карт: шестёрку, семёрку, восьмёрку, девятку, десятку, валета, даму, короля и туза (карты перечислены по возрастанию их достоинства). После этого карты перемешали и каждому раздали по три карты. Каждый мудрец видит только свои карты. Первый сказал: «Моя старшая карта — валет». Тогда второй ответил: «Я знаю, какие карты у каждого из вас». У кого из мудрецов был туз?

4.3.9. [Mpr — 2003.6.3] На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

4.3.10. [Mpr — 2015.6.3] Математик с пятью детьми зашел в пиццерию.

Маша: Мне с помидорами и чтоб без колбасы.

Даша: Я буду без помидоров.

Никита: А я с помидорами. Но без грибов!

Игорь: И я без грибов. Зато с колбасой!

Ваня: А мне с грибами.

Папа: Да, с такими привередами одной пиццей явно не обойдёшься...

Сможет ли математик заказать две пиццы и угостить каждого ребенка такой, какую тот просил, или всё же придётся три пиццы заказывать?

Всё же придётся

4.3.11. [Mpr — 2011.6.3;7.3] Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что верными оказались ровно три прогноза. С каким счётом закончился матч?

4.3.12. [Ust — 2013.6.3] Карлсон открыл школу, и 1 сентября во всех трёх первых классах было по три урока: Курощение, Низведение и Дуракаваляние. Один и тот же предмет в двух классах одновременно идти не может. Курощение в 1Б было первым уроком. Учитель Дуракаваляния похвалил учеников 1Б: «У вас получается ещё лучше, чем у 1А». Низведение на втором уроке было не в 1А. В каком классе валяли дурака на последнем уроке?

4.3.13. [Ust — 2012.7.3] Четверо детей сказали друг о друге так.

Маша: Задачу решили трое: Саша, Наташа и Гриша.

Саша: Задачу не решили трое: Маша, Наташа и Гриша.

Наташа: Маша и Саша солгали.

Гриша: Маша, Саша и Наташа сказали правду.

Сколько детей на самом деле сказали правду?

4.3.14. [Ust — 2006.7.3] В XIX и XX веках Россией правили 6 царей из династии Романовых. Вот их имена и отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович и Павел Петрович. Один раз после брата правил брат, во всех остальных случаях — после отца сын. Как известно, последнего русского царя звали Николаем. Восстановите порядок правления царей. *К сожалению, жюри упорно делает вид, что не знает русской истории, и не верит ничему кроме логических рассуждений.*

4.3.15. [Arh — 2015.3] Однажды на остров Рыцарей (которые всегда говорят правду) и Лжецов (всегда лгут), приехал путешественник. Выйдя на берег, он встретил процессию из четырёх островитян, которые несли 12 красных и 4 синих шариков (по 4 каждый). Каждый из них высказал одно утверждение. Первый сказал: «Красных шариков у меня меньше, чем синих». Второй сказал: «Синих шариков у меня не меньше, чем красных». Третий сказал: «Синих и красных шариков у меня поровну». Четвёртый сказал: «Красных у меня не более одного». Не можете ли Вы указать, сколько рыцарей могло быть среди них?

4.3.16. [Mpr — 2009.7.3] У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зелёный: «Вместе у нас 27 ног», жёлтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

4.3.17. [Mpr — 2009.6.4] Если у осьминога чётное число ног, он всегда говорит правду. Если нечётное, то он всегда лжёт. Однажды зелёный осьминог сказал тёмно-синему:

— У меня 8 ног. А у тебя только 6.

— Это у меня 8 ног, — обиделся тёмно-синий. — А у тебя всего 7.

— У тёмно-синего действительно 8 ног, — поддержал фиолетовый и похвастался: — А вот у меня целых 9!

— Ни у кого из вас не 8 ног, — вступил в разговор полосатый осьминог. — Только у меня 8 ног!

У кого из осьминогов было ровно 8 ног?

4.3.18. [Mpr — 1996.6.4] Три человека A, B, C пересчитали кучу шариков четырёх цветов. При этом каждый из них правильно различал какие-то два цвета, а два других мог путать: один путал красный и оранжевый, другой — оранжевый и жёлтый, а третий — жёлтый и зелёный. Результаты их подсчётов приведены в таблице. Сколько каких шариков было на самом деле?

	красный	оранжевый	жёлтый	зелёный
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

4.3.19. [Ust — 2008.6.4] В школе колдовства 13 учеников. Перед экзаменом по ясновидению преподаватель посадил их за круглый стол и попросил угадать, кто получит диплом ясновидящего. Про себя и двух своих соседей все скромно умолчали, а про всех остальных написали: «Никто из этих десяти не получит!» Конечно же, все сдавшие экзамен угадали, а все остальные ученики ошиблись. Сколько колдунов получили диплом?

4.3.20. [Mpr — 1991.7.4] Знайка пришёл в гости к братьям-близнецам Винтику и Шпунтику, зная, что один из них никогда не говорит правду, и спросил одного из них: «Ты Винтик?» «Да», — ответил тот. Когда Знайка спросил об этом же второго, то получил столь же чёткий ответ и сразу определил, кто есть кто.

Кого звали Винтиком?

4.3.21. [Mpr — 1998.7.4] На острове Контрастов живут и рыцари, и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?

4.3.22. [Arh — 2013.4] У царя Гороха три сына: старший — Пётр, средний — Фёдор и младший — Иван-дурак. Царь хочет женить старшего сына на царевне Несмеяне. Известно, что два сына царя Гороха — рыцари (всегда говорят правду), а один — лжец (всегда врёт), но мало кто знает, кто из них кто. Царевна Несмеяна хочет выяснить, за кого (рыцаря или лжеца) ей предлагают выйти замуж. Может ли она это узнать, задав один вопрос Ивану? (Иван-дурак умеет отвечать на вопросы только «да» или «нет»; кто среди братьев рыцарь, и кто — лжец, ему известно).

4.3.23. [Arh — 2014.4] На конференции по математической физике за круглым столом собрались рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы — врут), причём известно, что среди физиков и математиков лжецов поровну. Каждому из участников конференции задали вопрос: «Кто ваш сосед справа: физик или математик?». Подводя итоги, председатель заметил: «Интересно, что нас здесь 34 человека, причём физиков и математиков поровну, однако каждый утверждает, что его сосед справа — математик». Определите, кем был председатель — рыцарем или лжецом?

4.3.24. [Arh — 2019.4] На острове рыцарей и лжецов прошёл марафонский забег. После забега каждому жителю острова задали 2 вопроса: «Участвовали ли Вы в забеге?» и «Добежали ли Вы до финиша?». Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а на вопросы отвечали «Да» или «Нет». На первый вопрос 50% опрошенных ответили «Да». На второй вопрос 45% опрошенных ответили «Нет». Кого среди участников забега, не добежавших до финиша, больше: рыцарей или лжецов?

4.3.25. [Ust — 2016.7.4] У Буратино есть 5 монет, ровно одна из них — фальшивая. Какая именно — известно только Коту Базилио. Буратино может выбрать три монеты, одну из них отдать Коту, и за это узнать про другие две, есть ли среди них фальшивая. Буратино знает, что Кот за настоящую монету скажет правду, а за фальшивую — соврёт. Как Буратино определить фальшивую монету среди всех пяти, задав не более трёх вопросов?

4.3.26. [Ust — 2002.7.4] Вовочка пришёл сдавать компьютерный тест. На экране появились 6 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». После ответа на все вопросы компьютер вычисляет количество правильных ответов и ставит: двойку, если правильных ответов не более двух; тройку — если их три; четвёрку — если четыре; пятёрку — если пять или шесть.

Вовочка не знал ответа ни на один из вопросов. Тем не менее, по предыдущему опыту он знал следующее: первый и последний вопросы требуют противоположных ответов; не бывает, что на три подряд вопроса ответ один и тот же; не бывает, что утвердительные и отрицательные ответы строго чередуются; последовательность ответов на первые три вопроса не бывает в точности такой же, как последовательность ответов на последние три вопроса.

Помогите Вовочке не получить двойку.

4.3.27. [Arh — 2018.4] Военные учения на острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут) решили начать с опроса. Для этого 500 человек построили в виде прямоугольника 20×25 (20 человек в поперечном ряду — шеренге, 25 человек в продольном ряду — колонне). В ходе опроса каждый заявил: 1) «Если не считать меня, в моей шеренге рыцарей больше, чем лжецов», 2) «Если не считать меня, в моей колонне лжецов больше, чем рыцарей». По этим данным определите, сколько рыцарей в строю.

4.3.28. [Mpr — 2011.6.5] Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись?

4.3.29. [Mpr — 2002.6.5] Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю», и по ответу на который Вы сможете понять, какие монеты ему достались.

4.3.30. [Ust — 2012.6.5] На острове рыцарей и лжецов путешественник пришел в гости к своему знакомому рыцарю и увидел его за круглым столом с пятью гостями.

— Интересно, а сколько среди вас рыцарей? — спросил он.

— А ты задай каждому какой-нибудь вопрос и узнай сам, — посоветовал один из гостей.

— Хорошо. Скажи мне каждый: кто твои соседи? — спросил путешественник.

На этот вопрос все ответили одинаково.

— Данных недостаточно! — сказал путешественник.

— Но сегодня день моего рождения, не забывай об этом, — сказал один из гостей.

— Да, сегодня день его рождения! — сказал его сосед.

И путешественник смог узнать, сколько за столом рыцарей. Действительно, сколько же их?

4.3.31. [Arh — 2017.5] Кощей Бессмертный испытывает Ивана-царевича. На клетчатой доске 5×9 он отметил невидимыми чернилами квадрат 2×2. Ивану разрешается, выбрав несколько клеток, спросить у Кощея, есть ли среди них хотя бы одна отмеченная, на что Кощей обязан ответить правдиво: «да» или «нет». Сможет ли Иван найти отмеченный квадрат, задав не более 5 вопросов?

4.3.32. [Ust — 2018.6.6] В комнате стоят 20 стульев двух цветов: синего и красного. На каждый из стульев сел либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый из сидящих заявил, что он сидит на синем стуле. Затем они как-то пересели, после чего половина из сидящих сказали, что сидят на синих стульях, а остальные сказали, что сидят на красных. Сколько рыцарей теперь сидит на красных стульях?

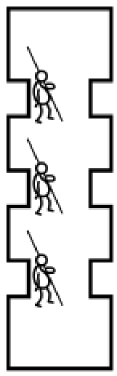
4.3.33. [Mpr — 2005.6.6] В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он — хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас ещё, возможно, говорят. Определите, из каких племён были пирующие, если известно, что за столом сидело а) девять; б) десять жителей Пустоземья. Объясните своё решение.

4.3.34. [Mpr — 2007.6.6] Кощей Бессмертный похитил у царя трёх дочерей. Отправился Иван-царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит:

«Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них — царёвы дочери, а ещё две — мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у неё спрашивать про каждую из пятерых: „Это царевна?“ Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если ещё и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой».

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кощеевых дочерей: а) вернуться живым; б) увезти царевен с собой?

4.3.35. [Mpr — 2008.6.6;7.4] Василиса Премудрая решила запереть Кощея в прямом коридоре, разделённом тремя проходами на четыре комнаты, причём в каждом проходе, облокотившись на одну из стен, стоит толстый усталый стражник. Каждый раз, когда Кощей переходит из одной комнаты в другую, стражник переходит к противоположной стене и облокачивается на неё. Если все стражники облокотятся на одну стену, она не выдержит и рухнет, а Кощей выйдет на свободу. Может ли Василиса изначально так прислонить стражников и разместить Кощея, чтобы он никогда не смог выбраться?



4.3.36. [Mpr — 2012.6.6] Известно, что Шакал всегда лжёт, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф даёт честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

4.3.37. [Ust — 2016.6.6] На кружок пришли дети из двух классов: Ваня, Дима, Егор, Инна, Леша, Саша и Таня. На вопрос: «Сколько здесь твоих одноклассников?» каждый честно ответил «Двое» или «Трое». Но мальчики думали, что спрашивают только про мальчиков-одноклассников, а девочки правильно понимали, что спрашивают про всех. Кто Саша — мальчик или девочка?

4.3.38. [Ust — 2010.6.6] На острове Правландия все жители могут ошибаться, но младшие никогда не противоречат старшим, а когда старшие противоречат младшим, они (старшие) не ошибаются. Между жителями А, Б и В произошёл такой разговор:

А: Б — самый высокий.
Б: А — самый высокий.
В: Я выше Б.

Следует ли из этого разговора, что чем моложе человек, тем он выше (для трёх говоривших)?

4.3.39. [Ust — 2018.7.6] На острове рыцарей и лжецов каждый дружит с десятью другими жителями (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый житель острова заявил, что среди его друзей больше лжецов, чем рыцарей. Может ли количество рыцарей быть вдвое больше, чем количество лжецов?

4.3.40. [Arh — 2012.6] За круглым столом сидят 38 попугаев и Мартышка. Известно, что каждый из них либо всегда лжёт (таких будем называть «лжецами»), либо всегда говорит правду (таких будем называть «правдивыми»). Мартышка задала каждому попугаю один и тот же вопрос: «Кем является Ваш сосед справа — правдивым или лжецом?» (опрос шёл последовательно по кругу). Первые два попугая (справа от Мартышки) ответили: «мой сосед справа — лжец». Следующие два: «мой сосед справа — правдивый», следующие два: «мой сосед справа — лжец», и так далее. По окончании опроса Мартышка сказала: «Среди нас не менее 9 правдивых». Сколько правдивых было на самом деле?

4.3.41. [Arh — 2017.6] К остановке, где останавливаются автобусы с номерами 164, 171, 258, 285, 365, 367, 377, 577, подошли учитель (он знает номер нужного автобуса) и три его ученика (они его не знают). Учитель предложил поиграть.

Он сообщил каждому (по секрету от остальных) одну из цифр номера: Лене — первую цифру, Васе — вторую, Коле — третью, и попросил угадать номер нужного автобуса (дети знают, кому сообщена первая цифра номера, кому — вторая, а кому — третья).

После этого между ребятами состоялся разговор:

Лена: я не знаю номера, но понимаю, что и остальные его не знают.

Вася: я не знаю номера, но Коля теперь должен его знать.

Коля: да, я знаю номер, и вы двое помогли мне его определить.

Укажите и Вы номер нужного автобуса.

4.3.42. [Ust — 2014.6.7] Врун всегда лжёт, Хитрец говорит правду или ложь, когда захочет, а Переменчик говорит то правду, то ложь попеременно. Путешественник встретил Вруна, Хитреца и Переменчика, которые знают друг друга. Сможет ли он, задавая им вопросы, выяснить, кто есть кто?

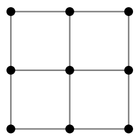
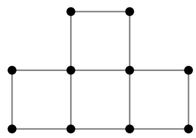
4.3.43. [Ust — 2010.6.9] В некотором государстве живут граждане трёх типов:

а) *дурак* считает всех дураками, а себя умным;
б) *скромный умный* про всех знает правильно, а себя считает дураком;
в) *уверенный умный* про всех знает правильно, а себя считает умным.

В думе — 200 депутатов. Премьер-министр провёл анонимный опрос думцев: сколько умных в этом зале сейчас находится? По данным анкет он не смог узнать количество умных. Но тут из поездки вернулся единственный депутат, не участвовавший в опросе. Он заполнил анкету про всю думу, включая себя, и прочитав её, премьер-министр всё понял. Сколько умных могло быть в думе (включая путешественника)?

4.3.44. [Mpr — 2007.7.6] Буратино ходит по улицам города, на одном из перекрёстков которого зарыт клад. На каждом перекрёстке ему по радио сообщают, приблизился он к кладу или удалился (по сравнению с предыдущим перекрёстком). Радио либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт (но Буратино не знает, лжёт оно или нет).

Сможет ли Буратино точно узнать, где закопан клад, если план города имеет вид:

а)  б) 

(Перекрёстки отмечены точками.)

4.3.45. [Mpr — 1999.7.6] Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что два из этих квадратов имеют одинаковый размер.

4.4 Перебор случаев

4.4.1. [Mpr — 2004.6.1] Кузнечик прыгает вдоль прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

4.4.2. [Mpr — 2003.6.6] На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

4.4.3. [Mpr — 2002.6.6] Айрат выписал подряд все числа месяца:

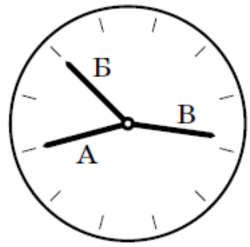
$$123456789101112\ldots$$

и покрасил три дня (дни рождения своих друзей), никакие два из которых не идут подряд. Оказалось, что все непокрашенные участки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

4.4.4. [Ust — 2005.6.7] По дороге на новогодний праздник несколько мальчиков помогали Деду Морозу нести подарки. Каждый из мальчиков нёс по три подарка, а остальные 142 подарка Дед Мороз вёз на санях. Все подарки Дед Мороз разделил поровну между всеми этими мальчиками и 14 девочками. Сколько могло быть мальчиков?

4.4.5. [Arh — 2012.1] Петя обратил внимание, что дата проведения Турнира Архимеда, записанная восемью цифрами (22.01.2012) обладает интересной особенностью: переставив первые четыре цифры, можно получить номер года. А какие ещё даты в этом году имеют такое же свойство?

4.4.6. [Mpr — 2013.7.4] Дима увидел в музее странные часы (см. рисунок). Они отличаются от обычных часов тем, что на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да ещё секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы? (Стрелки А и Б на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка В чуть-чуть не дошла до часовой отметки.)



4.4.7. [Ust — 2006.7.4] На площади репетировал военный оркестр. Для исполнения гимна музыканты выстроились квадратом, а для исполнения лирической песни — перестроились в прямоугольник. При этом количество шеренг увеличилось на пять. Сколько музыкантов в оркестре?

4.4.8. [Mpr — 2016.7.6] На конкурсе «А ну-ка, чудища!» стоят в ряд 15 драконов. У соседей число голов отличается на 1. Если у дракона больше голов, чем у обоих его соседей, его считают хитрым, если меньше, чем у обоих соседей, — сильным, остальных (в том числе стоящих с краю) считают обычными. В ряду есть ровно четыре хитрых дракона — с 4, 6, 7 и 7 головами и ровно три сильных — с 3, 3 и 6 головами. У первого и последнего драконов голов поровну.

а) Приведите пример того, как такое могло быть.

б) Докажите, что число голов у первого дракона во всех примерах одно и то же.

4.5 Оценка плюс пример

4.5.1. [Mpr — 2008.6.2] Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?

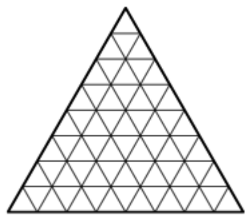
4.5.2. [Mpr — 1991.6.2] Электрик был вызван для ремонта гирлянды из четырёх соединённых последовательно лампочек, одна из которых перегорела. На вывинчивание любой лампочки из гирлянды уходит 10 секунд, на завинчивание — 10 секунд. Время, которое тратится на другие действия, мало́. За какое наименьшее время электрик заведомо может найти перегоревшую лампочку, если у него есть одна запасная лампочка?

4.5.3. [Mpr — 1997.7.2] В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей (как минимум) должно быть в семье, если взрослых в ней

а) 5 человек?

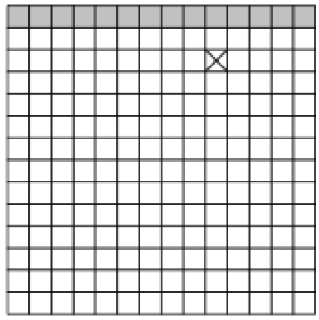
б) 8 человек?

4.5.4. [Mpr — 2016.6.3] Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (см. рисунок). Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?



4.5.5. [Mpr — 1990.5.3] 48 кузнецов должны подковать 60 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

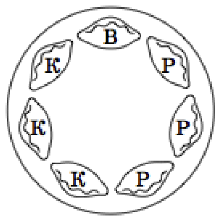
4.5.6. [Mpr — 2018.7.3] Все клетки верхнего ряда квадрата 14×14 заполнены водой, а в одной клетке лежит мешок с песком (см. рис.). За один ход Вася может положить мешки с песком в любые 3 не занятые водой клетки, после чего вода заполняет каждую из тех клеток, которые граничат с водой (по стороне), если в этой клетке нет мешка с песком. Ходы продолжаются, пока вода может заполнять новые клетки. Как действовать Васе, чтобы в итоге вода заполнила как можно меньше клеток?



4.5.7. [Ust — 2005.7.4] Каркас куба с рёбрами длины 1 намазан мёдом. В вершине куба находится жук. Какой минимальный путь он должен проползти, чтобы съесть весь мёд?

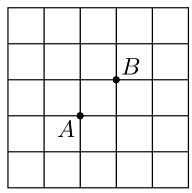
4.5.8. [Mpr — 2015.6.5] Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов? Обоснуйте свой ответ.

4.5.9. [Mpr — 2014.6.5] Мама испекла пирожки — три с рисом, три с капустой и один с вишней — и выложила их на блюдо по кругу (см. рисунок). Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. На вид все пирожки одинаковые. Маша знает, как они лежали, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Маше наверняка добиться этого, надкусив как можно меньше невкусных пирожков?



4.5.10. [Mpr — 2006.6.5] Дед звал внука к себе в деревню: «Вот посмотришь, какой я необыкновенный сад посадил! У меня там растёт четыре груши, а ещё есть яблони, причём они посажены так, что на расстоянии 10 метров от каждой яблони растёт ровно две груши». — «Ну и что тут интересного, — ответил внук. — У тебя всего две яблони». «А вот и не угадал, — улыбнулся дед. — Яблонь у меня в саду больше, чем груш». Нарисуйте, как могли расти яблони и груши в саду у деда. Постарайтесь разместить на рисунке как можно больше яблонь, не нарушая условий. Если Вы думаете, что разместили максимально возможное число яблонь, попробуйте объяснить, почему это так.

4.5.11. [Mpr — 2009.6.5] Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



4.5.12. [Mpr — 2012.6.5] Замените в равенстве

$$\mathtt{ПИРОГ} = \mathtt{КУСОК} + \mathtt{КУСОК} + \mathtt{КУСОК} + \ldots + \mathtt{КУСОК}$$

одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными так, чтобы равенство было верным, а количество «кусков пирога» было бы наибольшим из возможных.

4.5.13. [Ust — 2014.6.5] На клетчатой доске размером 4×4 Петя закрашивает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток. Какое наименьшее количество клеток должен закрасить Петя, чтобы Вася не выиграл?

4.5.14. [Ust — 2013.6.6] Для игры в шляпу Надя хочет разрезать лист бумаги на 48 одинаковых прямоугольников. Какое наименьшее количество разрезов ей придется сделать, если любые куски бумаги можно перекладывать, но нельзя сгибать, а Надя способна резать одновременно сколько угодно слоёв бумаги? (Каждый разрез — прямая линия от края до края куска.)

4.5.15. [Ust — 2015.6.6] Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера.

4.5.16. [Ust — 2008.6.6] Найдите наибольшее число цветов, в которые можно покрасить рёбра куба (каждое ребро одним цветом) так, чтобы для каждой пары цветов нашлись два соседних ребра, покрашенные в эти цвета. *Соседними считаются рёбра, имеющие общую вершину.*

4.5.17. [Ust — 2006.6.6] Выступая на арене с 10 львами и 15 тиграми, дрессировщик Паша потерял над ними контроль, и звери начали пожирать друг друга. Лев насытится, если съест трёх тигров, а тигр — если съест двух львов. Определите, какое наибольшее количество хищников могло насытится и как это могло произойти.

4.5.18. [Mpr — 2013.6.6] Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить всё жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдаёт Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

а) жалованье между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;

б) жалованье между отрядами Черномор распределяет поровну?

4.5.19. [Mpr — 2019.6.6] Каждая грань куба $6 \times 6 \times 6$ разбита на клетки 1×1. Куб оклеили квадратами 2×2 так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.)

4.5.20. [Arh — 2012.5] В мешке лежат золотые монеты — дублоны, дукаты и пиастры, одинаковые на ощупь. Если из мешка вынуть 10 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один дублон; если вынуть 9 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один дукат; если же вынуть 8 монет, то среди них обязательно окажется хотя бы один пиастр. Какое наибольшее количество монет могло быть в мешке?

4.5.21. [Mpr — 2003.7.5] В честь праздника 1% солдат в полку получил новое обмундирование. Солдаты расставлены в виде прямоугольника так, что солдаты в новом обмундировании оказались не менее чем в 30% колонни не менее чем в 40% шеренг. Какое наименьшее число солдат могло быть в полку?

4.5.22. [Ust — 2013.6.7] В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни-Пух может взять любые два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно съесть Винни-Пух?

4.5.23. [Ust — 2012.6.7] Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

4.5.24. [Ust — 2002.6.7] Каждое из 50 изделий нужно сначала покрасить, а потом упаковать. Время окраски — 10 минут, паковки — 20 минут. После окраски деталь должна 5 минут сохнуть. Сколько необходимо нанять маляров и сколько упаковщиков, чтобы выполнить работу в кратчайшее время, если нельзя нанимать более 10 человек?

4.5.25. [Ust — 2017.6.8;7.8] В каждой клетке доски размером 5×5 стоит крестик или нолик, причём никакие три крестика не стоят подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали. Какое наибольшее количество крестиков может быть на доске?

4.5.26. [Mpr — 1993.6.8] В спортклубе тренируются 100 толстяков весом от 1 до 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

4.5.27. [Ust — 2016.6.9] В магазине продают коробки конфет. Среди них есть не менее пяти коробок разной цены (никакие две из них не стоят одинаково). Какие бы две коробки ни купил Вася, Петя всегда сможет также купить две коробки, потратив столько же денег. Какое наименьшее количество коробок конфет должно быть в продаже?

4.5.28. [Ust — 2012.6.9] План дворца шаха — это квадрат размером 6×6, разбитый на комнаты размером 1×1. В середине каждой стены между комнатами есть дверь. Шах сказал своему архитектору: «Сломай часть стен так, чтобы все комнаты стали размером 2×1, новых дверей не появилось, а путь между любыми двумя комнатами проходил не более, чем через N дверей». Какое наименьшее значение N должен назвать шах, чтобы приказ можно было выполнить?

4.5.29. [Arh — 2014.6] Незнайка переставил цифры в некотором числе A и получил число B. Затем он вычислил разность $A - B$ и получил при этом число, записанное с помощью одних единиц (*другие цифры не использовались*). Какое наименьшее число могло у него получиться?

4.5.30. [Mpr — 2005.7.6] На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге? (Приведите пример и докажите, что больше нельзя.)

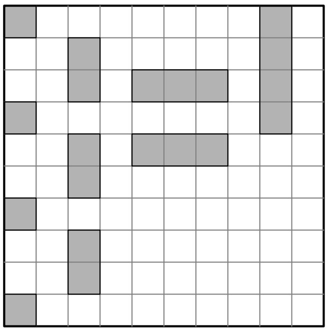
4.5.31. [Mpr — 2008.7.6] Вася постоял некоторое время на остановке. За это время проехал один автобус и два трамвая. Через некоторое время на эту же остановку пришёл Шпион. Пока он там сидел, проехало 10 автобусов. Какое минимальное число трамваев могло проехать за это время? И автобусы, и трамваи ходят с равными интервалами, причём автобусы ходят с интервалом 1 час.

4.5.32. [Mpr — 2012.7.6] Победив Кащея, потребовал Иван золота, чтобы выкупить Василису у разбойников. Привел его Кащей в пещеру и сказал:

«В сундуке лежат золотые слитки. Но просто так их унести нельзя: они заколдованы. Переложи себе в суму один или несколько. Потом я переложу из сумы в сундук один или несколько, но обязательно другое число. Так мы будем по очереди перекладывать их: ты в суму, я в сундук, каждый раз новое число. Когда новое перекладывание станет невозможным, сможешь унести свою суму со слитками».

Какое наибольшее число слитков может унести Иван, как бы ни действовал Кащей, если в сундуке исходно лежит а) 13; б) 14 золотых слитков? Как ему это сделать?

4.5.33. [Mpr — 2010.7.6] Легко разместить комплект кораблей для игры в «Морской бой» на доске 10×10 (см. рисунок). А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект? (Напомним, что согласно правилам корабли не должны соприкасаться даже углами.)



4.5.34. [Mpr — 2013.7.6] Лиса Алиса и кот Базилио вырастили на дереве 20 фальшивых купюр и теперь вписывают в них семизначные номера. На каждой купюре есть 7 пустых клеток для цифр. Базилио называет по одной цифре «1» или «2» (других он не знает), а Алиса вписывает названную цифру в любую свободную клетку любой купюры и показывает результат Базилио.

Когда все клетки заполнены, Базилио берет себе как можно больше купюр с разными номерами (из нескольких с одинаковым номером он берет лишь одну), а остаток забирает Алиса. Какое наибольшее количество купюр может получить Базилио, как бы ни действовала Алиса?

4.5.35. [Ust — 2014.7.9] На окружности отмечены 2014 точек. В одной из них сидит кузнечик, который делает прыжки по часовой стрелке либо на 57 делений, либо на 10. Известно, что он посетил все отмеченные точки, сделав наименьшее количество прыжков длины 10. Какое?

4.5.36. [Ust — 2010.7.9] Сеть автобусных маршрутов в пригороде Амстердама устроена так, что: а) на каждом маршруте есть ровно три остановки; б) любые два маршрута либо вовсе не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку. Какое наибольшее количество маршрутов может быть в этом пригороде, если в нём всего 9 остановок?

4.5.37. [Ust — 2018.7.9] В какое наименьшее количество цветов можно покрасить натуральные числа так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 2 или в два раза, были покрашены в разные цвета?

4.6 Обратный ход

4.6.1. [Mpr — 1999.6.1] На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили ещё по точке. Такое «уплотнение» повторили ещё дважды (всего 3 раза). В результате на прямой оказалось отмечено 113 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

$\boxed{15}$

4.6.2. [Mpr — 1996.7.2] Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (отдал второму), потом второй проиграл половину своих, потом снова первый проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго — 33. Сколько монет было у первого пирата до начала игры?

$\boxed{24}$

4.6.3. [Mpr — 1993.7.3] Решите уравнение:

$$1993 = 1 + 8 : (1 + 8 : (1 - 8 : (1 + 4 : (1 - 4 : (1 - 8 : x))))).$$

$\boxed{x = 9}$

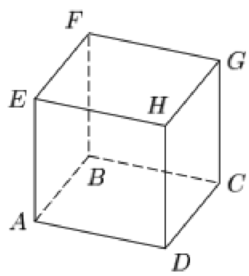
4.7 Принцип крайнего

4.7.1. [Ust — 2008.6.3] Давным-давно страной Тарнией правил царь Ятианр. Чтобы тарнийцы поменьше рассуждали, он придумал для них простой язык. Его алфавит состоял всего из шести букв: А, И, Н, Р, Т, Я, но порядок их отличался от принятого в русском языке. Словами этого языка были все последовательности, использующие каждую из этих букв по одному разу.

Ятианр издал полный словарь нового языка. В соответствии с алфавитом первым словом словаря оказалось «Тарния». Какое слово следовало в словаре за именем Ятианр?

4.7.2. [Mpr — 2000.7.5] В вершинах куба $ABCDEFGH$ расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что обязательно найдутся две диаметрально противоположные вершины, числа в которых отличаются не более чем на единицу.

(Пары диаметрально противоположных вершин куба: A и G, B и H, C и E, D и F.)



4.7.3. [Ust — 2008.7.7] Артём коллекционирует монеты. В его коллекции 27 монет, причём все они имеют различный диаметр, различную массу и были выпущены в разные годы. Каждая монета хранится в отдельном спичечном коробке. Может ли Артём сложить из этих коробков параллелепипед $3 \times 3 \times 3$ так, чтобы любая монета была легче монеты, находящейся под ней, меньше монеты справа от нее и древнее той, которая находится перед ней?

4.7.4. [Ust — 2013.6.9] В классе 27 учеников. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любых двух учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, в котором занимаются не менее 18 учеников.

4.7.5. [Ust — 2013.7.9] Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, в котором занимается не менее двух третей всего класса.

4.7.6. [Ust — 2011.7.9] Компьютеры №1, №2, №3, ..., №100 соединены в кольцо (первый со вторым, второй с третьим, ..., сотый с первым). Хакеры подготовили 100 вирусов, занумеровали их и в различное время в произвольном порядке запускают каждый вирус на компьютер, имеющий тот же номер. Если вирус попадает на незаражённый компьютер, то он заражает его и переходит на следующий в цепи компьютер с бо́льшим номером до тех пор, пока не попадёт на уже заражённый компьютер (с компьютера №100 вирус переходит на компьютер №1). Тогда вирус погибает, а этот компьютер восстанавливается. Ни на один компьютер два вируса одновременно не попадают. Сколько компьютеров будет заражено после того как все 100 вирусов совершат атаку?

Глава 5

Алгоритмы, процессы, игры

5.1 Алгоритмы и операции

5.1.1. [Mpr — 1993.6.1] Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул: «А!». Во вторник он воскликнул: «АУ!», в среду — «АУУА!», в четверг — «АУУАУААУ!». Что он воскликнет в субботу?

5.1.2. [Ust — 2004.6.1] Даны две палочки. Их можно прикладывать друг к другу и делать отметки. Как с помощью этих операций выяснить, что больше — длина более короткой палочки или 2/3 длины более длинной палочки?

5.1.3. [Ust — 2002.6.1] У первого из десяти друзей есть 5 тугриков, у второго — 10 тугриков, у третьего — 15 тугриков, и т. д., у десятого — 50 тугриков. Они сели на ковёр-самолёт, полёт на котором стоит 5 тугриков с носа. Смогут ли они честно расплатиться с ковром-самолётом, если тот не даёт сдачу и не разменивает деньги?

5.1.4. [Mpr — 2010.7.1] У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11?

5.1.5. [Mpr — 1994.6.2] Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее

а) на 6-м;

б) на 1994-м месте.

Ответ объясните.

5.1.6. [Mpr — 1998.6.2] Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра?

5.1.7. [Mpr — 2014.6.3] Одуванчик утром распускается, два дня цветёт жёлтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня — 15 жёлтых и 11 белых.

а) Сколько жёлтых одуванчиков было на поляне позавчера?

б) Сколько белых одуванчиков будет на поляне завтра?

а) 25; б) 9

5.1.8. [Ust — 2016.6.3] На левом берегу реки собрались 5 физиков и 5 химиков. Всем надо на правый берег. Есть двухместная лодка. На правом берегу ни в какой момент не могут находиться ровно три химика или ровно три физика. Каким образом им всем переправиться, сделав 9 рейсов направо?

5.1.9. [Ust — 2009.6.3] Есть пять батареек, из которых три заряжены, а две разряжены. Фотоаппарат работает от двух заряженных батареек. Покажите, как за четыре попытки можно гарантированно включить фотоаппарат.

5.1.10. [Mpr — 2010.6.4] В обменном пункте совершаются операции двух типов:

1) дай 2 евро — получи 3 доллара и конфету в подарок;

2) дай 5 долларов — получи 3 евро и конфету в подарок.

Когда богатенький Буратино пришёл в обменник, у него были только доллары. Когда ушёл — долларов стало поменьше, евро так и не появились, зато он получил 50 конфет. Во сколько долларов обошелся Буратино такой «подарок»?

В 10 долларов

5.1.11. [Ust — 2009.6.4] Пончик находится в сломанном луноходе на расстоянии 18 км от Лунной базы, в которой сидит Незнайка. Между ними устойчивая радиосвязь. Запаса воздуха в луноходе хватит на 3 часа, кроме того, у Пончика есть баллон для скафандра, с запасом воздуха на 1 час. У Незнайки есть много баллонов с запасом воздуха на 2 часа каждый. Незнайка не может нести больше двух баллонов одновременно (одним из них он пользуется сам). Скорость передвижения по Луне в скафандре равна 6 км/ч. Сможет ли Незнайка спасти Пончика и не погибнуть сам?

5.1.12. [Mpr — 2014.7.4] Одуванчик утром распускается, три дня цветёт жёлтым, на четвёртый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а в среду — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу?

5.1.13. [Mpr — 1990.6.4;7.4] Поставьте в ряд а) 5 простых чисел; б) 6 простых чисел так, чтобы разности соседних чисел в каждом ряду были равны.

5.1.14. [Ust — 2008.7.4] В клубе встретились двадцать джентльменов. Некоторые из них были в шляпах, а некоторые — без шляп. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал её на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце десять джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу большее количество раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в клуб в шляпах?

5.1.15. [Ust — 2011.6.5;7.4] Вася выписал все слова (не обязательно осмысленные), которые получаются вычеркиванием ровно двух букв из слова *ИНТЕГРИРОВАНИЕ*, а Маша сделала то же самое со словом *СУПЕРКОМПЬЮТЕР*. У кого получилось больше слов?

5.1.16. [Arh — 2017.4] На Новогоднем базаре продаются гирлянды из шариков. В каждой гирлянде 201 шарик: некоторые — красные, остальные — зелёные. Шарики волшебные — по команде Дежурного Снеговика они могут менять цвет: красные становятся зелёными, а зелёные — красными. За один раз он может поменять цвет каких-нибудь двух, трёх или четырёх шариков, расположенных подряд. За каждое перекрашивание Снеговик берет 1 копейку. Федя утверждает, что рубля ему заведомо хватит на то, чтобы превратить любую гирлянду в одноцветную. Прав ли Федя?

5.1.17. [Mpr — 2015.7.5] Имеется набор из двух карточек: $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$. За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение — целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ и $\boxed{7}$, можно составить выражение $\boxed{7}\boxed{5}/\boxed{3}$ и получить карточку $\boxed{25}$ или составить выражение $\boxed{3}\boxed{5}$ и получить карточку $\boxed{35}$.)

Как получить карточку с числом 2015

а) за 4 операции;

б) за 3 операции?

5.1.18. [Mpr — 1991.7.5] Даны две последовательности:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 14,\ 10,\ 2 \quad \text{и} \quad 3,\ 6,\ 12.$$

В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

а) Найдите этот закон.

б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).

в) Докажите, что число 2^{1991} после нескольких переходов станет однозначным.

5.1.19. [Ust — 2006.7.5] На бесконечном листе клетчатой бумаги x клеток покрашены в чёрный цвет. Каждую секунду все белые клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх чёрные, становятся чёрными, а все клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх белые, становятся белыми. Остальные клетки не меняются. Может ли через несколько секунд случиться так, что на листе бумаги окажется ровно $\frac{3}{2}x$ чёрных клеток?

5.1.20. [Mpr — 1997.6.6] Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

5.1.21. [Mpr — 1997.6.6] Кощей Бессмертный взял в плен 43 человека и увёз их на остров. Отправился Иван-Царевич на двухместной лодке выручать их. А Кощей ему и говорит:

— Надоело мне этих дармоедов кормить, пусть плывут отсюда на твоей лодке подобру-поздорову. Имей в виду: с острова на берег доплыть можно только вдвоём, а обратно и один справится. Перед переправой я скажу каждому не менее чем про 40 других пленников, что это оборотни. Кому про кого скажу, сам выберешь. Если пленник про кого-то слышал, что тот оборотень, он с ним в лодку не сядет, а на берегу находиться сможет. Я заколдую их так, чтобы на суше они молчали, зато в лодке рассказывали друг другу про всех известных им оборотней. Пока хоть один пленник остаётся на острове, тебе с ними плавать нельзя. Лишь когда все 43 окажутся на том берегу, одному из них можно будет за тобой приплыть. А коли не сумеешь устроить им переправу — останешься у меня навсегда.

Есть ли у Ивана способ пройти испытание и вернуться с пленниками домой?

5.1.22. [Ust — 2014.6.6] К кабинке канатной дороги, ведущей на гору, подошли четыре человека, которые весят 50, 60, 70 и 90 кг. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме кабинка ездит туда-сюда только с грузом от 100 до 250 кг (в частности, пустой она не ездит), при условии, что пассажиров можно рассадить на две скамьи так, чтобы веса на скамьях отличались не более, чем на 25 кг. Каким образом все они смогут подняться на гору?

5.1.23. [Mpr — 1993.6.7] Али-Баба стоит с большим мешком монет в углу пустой прямоугольной пещеры размером $m \times n$ клеток, раскрашенных в шахматном порядке. Из любой клетки он может сделать шаг в любую из четырёх соседних клеток (вверх, вниз, вправо или влево). При этом он должен либо положить 1 монету в этой клетке, либо забрать из неё 1 монету, если, конечно, она не пуста. Может ли после прогулки Али-Бабы по пещере оказаться, что на чёрных клетках лежит ровно по 1 монете, а на белых монет нет?

5.1.24. [Ust — 2003.6.7] По кругу стоят восемь козлов разного роста. Любой из них умеет перепрыгивать через двух соседних козлов против часовой стрелки. Докажите, что при любом начальном расположении козлов они смогут встать по росту.

5.1.25. [Ust — 2005.7.6] На столе лежит стопка карт «рубашкой» вверх. Требуется переложить их в обратном порядке (и снова «рубашкой» вверх), применив несколько раз такую операцию: из любого места стопки вынимаются две соседние карты, переворачиваются как единое целое и кладутся на прежнее место. При каком количестве карт в стопке это можно сделать?

5.1.26. [Mpr — 2018.7.6] Робин Гуд взял в плен семерых богачей и потребовал выкуп. Слуга каждого богача принёс кошелёк с золотом, и все они выстроились в очередь перед шатром, чтобы отдать выкуп. Каждый заходящий в шатер слуга кладёт принесённый им кошелёк на стол в центре шатра и, если такого или большего по тяжести кошелька ранее никто не приносил, богача отпускают вместе со слугой. Иначе слуге велят принести ещё один кошелёк, который был бы тяжелее всех, лежащих в этот момент на столе. Сходив за очередным кошельком, слуга становится в конец очереди. Походы за кошельками занимают у всех одинаковое время, поэтому очерёдность захода в шатёр не сбивается. Когда Робин Гуд отпустил всех пленников, у него на столе оказалось: а) 28; б) 27 кошельков. Каким по счёту стоял в исходной очереди слуга богача, которого отпустили последним?

а) Седьмым; б) шестым или седьмым

5.1.27. [Mpr — 2019.7.6] В ряд лежат 100 монет, часть — вверх орлом, а остальные — вверх решкой. За одну операцию разрешается выбрать семь монет, лежащих через равные промежутки (т. е. семь монет, лежащих подряд, или семь монет, лежащих через одну, и т. д.), и все семь монет перевернуть. Докажите, что при помощи таких операций можно все монеты положить вверх орлом.

5.1.28. [Ust — 2012.7.7] На складах двух магазинов хранится пшено: на первом складе на 16 тонн больше, чем на втором. Каждую ночь ровно в полночь владелец каждого магазина ворует у своего конкурента четверть имеющегося на его складе пшена и перетаскивает на свой склад. Через 10 ночей воришек поймали. На каком складе в момент их поимки было больше пшена и на сколько?

5.1.29. [Ust — 2003.7.7] Восемь томов «Энциклопедии Козлов» сложили в стопку. Разрешается вынимать из стопки либо третью сверху книгу, либо самую нижнюю, и класть её наверх. Докажите, что независимо от начального расположения томов их можно сложить по порядку номеров.

5.1.30. [Ust — 2002.7.7] Робинзон Крузо поручил Пятнице провести перепись собак, кошек, коз и попугаев. Пятница решил отмечать каждую собаку палочкой, кошку — палочкой и ноликом, козу — двумя ноликами. Сможет ли Пятница отметить каждого попугая какой-нибудь последовательностью из палочек и ноликов, чтобы по его отчёту (Пятница пишет слева направо подряд без пробелов) Робинзон мог однозначно установить, сколько каких животных приняли участие в переписи?

5.2 Взвешивания

5.2.1. [Ust — 2002.7.1] В наборе из 10 гирек любые четыре гирьки перевешивают любые три из оставшихся. Верно ли, что любые три гирьки из этого набора перевешивают любые две из оставшихся семи?

5.2.2. [Mpr — 2017.7.2] У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому — 101 г мёда, а третьему — 102 г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар — на другую. Могло ли быть так, что каждая гирька легче 90 г?

5.2.3. [Arh — 2016.5] На столе три слитка золота весом в 3, 4 и 5 г. На каждом слитке указан вес, но надписи могут быть перепутаны. Вес слитков можно сравнивать на чашечных весах без гирь, но в момент взвешивания на одну из чашек (любую) прыгает невидимый гном весом в 1 г. Как, сделав не более двух взвешиваний, выяснить правильный вес хотя бы одного слитка?

5.2.4. [Arh — 2018.5] Из 9 монет одна фальшивая — более лёгкая. Алисе требуется найти 7 настоящих монет за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь. Возможно ли это? Следует учесть, что весы в Зазеркалье всегда «врут» (то есть показывают неправильное соотношение между грузами на чашках, например, если весы показывают равновесие, на самом деле равновесия нет и какой-то из двух грузов тяжелее).

5.2.5. [Ust — 2017.6.6] Четыре внешне одинаковые монетки весят 1, 2, 3 и 4 грамма. Можно ли за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь узнать, какая из них сколько весит?

5.2.6. [Ust — 2008.6.7] Ювелир изготовил 6 одинаковых по виду серебряных украшений массой 22 г, 23 г, 24 г, 32 г, 34 г и 36 г и поручил своему подмастерью выбить на каждом украшении его массу. Может ли ювелир за два взвешивания на чашечных весах без стрелок и гирек определить, не перепутал ли подмастерье украшения?

5.2.7. [Ust — 2011.6.8] Известно, что среди 63 монет есть 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие монеты также весят одинаково, и фальшивая монета легче настоящей. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

5.2.8. [Ust — 2019.6.8] Перед Петей выставили в ряд пять гирь. Ему известно, что это гири массами 19 г, 20 г, 20 г, 20 г, 21 г, стоящие в каком-то порядке, при этом гири массами 19 г и 21 г стоят рядом. У Пети есть электронные весы, которые показывают массу положенного на них груза. Помогите Пете за два взвешивания определить массу каждой гири.

5.2.9. [Ust — 2015.6.9] Есть 13 золотых и 14 серебряных монет, из которых ровно одна фальшивая. Известно, что если фальшивая монета — золотая, то она легче настоящей, так как сделана из меньшего количества золота, а если фальшивая монета — серебряная, то она тяжелее настоящей, так как сделана из более дешевого и тяжелого металла. Как найти фальшивую монету за три взвешивания на чашечных весах без гирь? (Настоящие золотые монеты весят одинаково и настоящие серебряные монеты весят одинаково.)

5.2.10. [Ust — 2006.6.9;7.9] По кругу лежат 13 старинных монет различного веса. За одно взвешивание можно узнать вес одной монеты. Объясните, как за шесть взвешиваний найти монету, которая тяжелее двух своих соседей.

5.3 Переливания

5.3.1. [Mpr — 2006.6.4] Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)

5.4 Таблицы

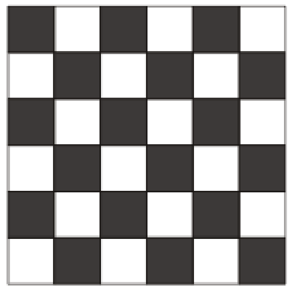
5.4.1. [Ust — 2015.6.1] В первой строке таблицы записаны подряд все числа от 1 до 9. Можно ли заполнить вторую строку этой таблицы теми же числами от 1 до 9 в каком-нибудь порядке так, чтобы сумма двух чисел в каждом столбце оказалась точным квадратом?

5.4.2. [Mpr — 2016.6.4] Аня захотела вписать в каждую клетку таблицы 5×8 по одной цифре таким образом, чтобы каждая цифра встречалась ровно в четырёх рядах. (Рядами мы считаем как столбцы, так и строчки таблицы.) Докажите, что у неё ничего не получится.

5.4.3. [Arh — 2013.5] В таблицу 10×10 записаны числа от 0 до 99 (см. рисунок). Коля поставил перед некоторыми из них знак минус, но так, что в каждой строке и каждом столбце минус поставлен ровно у половины чисел. Затем он подсчитал сумму всех чисел в таблице. Какие значения суммы могли у него получиться?

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

5.4.4. [Arh — 2019.3] В каждой чёрной клетке на клетчатом поле 6×6 (см. рис.) живёт гном, в каждой белой — эльф. Во вторник у каждого из них было не менее одной монеты. В среду каждый эльф дал каждому своему соседу-гному столько монет, сколько у этого гнома было во вторник. В пятницу каждый гном дал каждому своему соседу-эльфу столько монет, сколько у этого эльфа было в четверг. В другие дни монеты не передавались. Могло ли оказаться, что после этого у каждого эльфа и каждого гнома стало столько же монет, сколько было во вторник? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.



5.4.5. [Ust — 2004.7.6] Человек Рассеянный с улицы Бассейной ходит по клеткам доски 4×4. Находясь в клетке, он теряет в ней 1 рубль, после чего переходит в соседнюю по стороне клетку. Там он снова теряет 1 рубль и переходит, и так далее. На рисунке постарались указать, в какой клетке сколько рублей потеряно. Могло ли такое быть?

3	2	2	**4**
2	**3**	2	2
2	2	**3**	2
4	2	2	**3**

5.4.6. [Arh — 2016.6] а) Каждую клетку таблицы 20×15 красят в один из двух цветов: белый или чёрный. Можно ли их окрасить так, чтобы у каждой клетки были ровно две соседние клетки другого цвета?

б) Тот же вопрос для таблицы 20×16.

(Соседними называются клетки, имеющие общую сторону.)

5.4.7. [Mpr — 2011.7.6] Числа от 1 до 16 расставлены в таблице 4×4. В каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали (включая диагонали из одной клетки) отметили самое большое из стоящих в ней чисел (одно число может быть отмечено несколько раз). Могли ли оказаться отмечены

а) все числа, кроме, быть может, двух?

б) все числа, кроме, быть может, одного?

в) все числа?

5.4.8. [Mpr — 2015.7.6] Петя записал 25 чисел в клетки квадрата 5×5. Известно, что их сумма равна 500. Вася может попросить его назвать сумму чисел в любой клетке и всех её соседях по стороне. Может ли Вася за несколько таких вопросов узнать, какое число записано в центральной клетке?

5.4.9. [Ust — 2012.7.6] В каждой клетке таблицы 10×10 записано число. В каждой строке подчеркнули наибольшее число (или одно из наибольших, если их несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты ровно два раза. Докажите, что все числа, записанные в таблице, между собой равны.

5.4.10. [Ust — 2019.6.7] Клетки квадрата размером 3×3 заполнили цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, и подсчитали сумму чисел в каждой строке и в каждом столбце. Какое наибольшее количество идущих подряд целых чисел может быть среди этих сумм?

5.5 Игры и стратегии

5.5.1. [Ust — 2005.7.2] Аня и Катя играют в игру «Быки и коровы». Аня загадала четырёхзначное число с неповторяющимися цифрами, а Катя пытается это число угадать. Для этого она предлагает свои четырёхзначные числа (тоже с неповторяющимися цифрами), а Аня про каждое из них сообщает, сколько в нём «быков» (т. е. цифр, которые не только присутствуют и в Катином числе, и в Анином, но даже стоят на одних и тех же местах) и «коров» (цифр, которые присутствуют в обоих числах, но стоят на разных местах). Катя предложила числа 5860, 1674, 9432 и 3017 и на каждое число получила ответ «2 коровы». Какое число загадала Аня?

5.5.2. [Mpr — 2019.7.4] Имеется три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо объединить две кучки, после чего разделить эти камни на четыре кучки. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из играющих (Петя или Вася) может выиграть, как бы ни играл соперник?

5.5.3. [Arh — 2014.3] Маша и Катя играют в такую игру: по очереди обрывают лепестки у ромашки с 64 лепестками. За один ход разрешается сорвать любое нечётное количество лепестков, меньшее 16, причем запрещается повторять уже сделанные ходы. (*Например, если Катя при своём ходе сорвёт 3 лепестка, то в дальнейшем ни Маша, ни Катя сорвать 3 лепестка не имеют права.*) Выигрывает тот, кто сорвёт последний лепесток. Начинает Маша. Кто из них выиграет, как бы ни играл соперник?

5.5.4. [Ust — 2003.6.4] Вася и Митя играют в «морской бой» на поле размером 8×8 по следующим правилам. Митя расставляет 16 одноклеточных кораблей так, чтобы они не соприкасались (даже углами). Каждым ходом Вася называет одну из клеток поля и, если на этой клетке стоит корабль, то корабль считается уничтоженным. Докажите, что независимо от расстановки кораблей Вася за 4 хода сможет уничтожить хотя бы один корабль.

5.5.5. (*Симметричная стратегия*) Кто из игроков выигрывает при правильной игре в следующих ситуациях?

- На столе лежат две стопки монет: в одной из них 30 монет, а в другой — 20. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

- Двое по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол, причём так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
- На доске написано число 1. Двое по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает тот, кто первый запишет на доске число 30.
- Двое по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются битыми поставленными фигурами.
- На доске размером 8×8 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялось закрашенных уголков из трёх клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

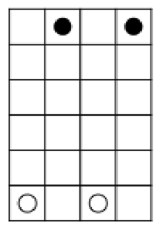
5.5.6. [Ust — 2015.6.7] Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись

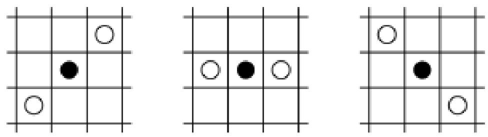
ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА.

Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву А. Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

5.5.7. [Ust — 2017.6.7] Два пирата, Билл и Джон, имея каждый по 74 золотые монеты, решили сыграть в такую игру: они по очереди будут выкладывать на стол монеты, за один ход — одну, две или три, а выиграет тот, кто положит на стол сотую по счёту монету. Начинает Билл. Кто может выиграть в такой игре, независимо от того, как будет действовать соперник?

5.5.8. [Mpr — 1994.7.5] На доске 4×6 клеток стоят две чёрные фишки (Вани) и две белые фишки (Серёжи, см. рисунок справа). Ваня и Серёжа по очереди двигают любую из своих фишек на одну клетку вперёд (по вертикали). Начинает Ваня. Если после хода любого из ребят чёрная фишка окажется между двумя белыми по горизонтали или по диагонали (как на нижних рисунках), она считается «убитой» и снимается с доски. Ваня хочет провести обе свои фишки с верхней горизонтали доски на нижнюю. Может ли Серёжа ему помешать?





5.5.9. [Ust — 2019.7.6] На доске записано: $* * * \times * * * \times * * * \times * * *$. Играют двое: учитель и ученик. Учитель называет ненулевую цифру, а ученик ставит ее вместо одной из звёздочек, причем учитель видит, куда именно. Ученик хочет, чтобы после двенадцати пар ходов произведение четырёх получившихся трёхзначных чисел делилось на 9. Сможет ли он этого добиться независимо от того, какие цифры назовет учитель?

5.5.10. [Arh — 2013.6] Вася и Коля играют в игру: закрашивают клетки квадратной доски 4×4. Первым ходит Вася, затем Коля, затем снова Вася и так далее, до тех пор, пока не окажется окрашенным какой-нибудь квадрат 2×2. Кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате, тот и проиграл. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

5.5.11. [Arh — 2019.6] На лавке стоят два пустых мешка: чёрный и белый и лежит много мелких алмазов. Кощей Бессмертный и Баба-Яга играют в игру: по очереди кладут алмазы в мешки. Кощей каждым своим ходом имеет право положить либо два алмаза в белый мешок, либо один — в чёрный, а Баба-Яга — либо два алмаза в чёрный мешок, либо один — в белый. Начинает Кощей. Побеждает тот, после хода которого в каком-нибудь мешке окажется больше 2019 алмазов. Кто может гарантированно победить и как для этого нужно играть?

5.5.12. [Mpr — 2014.7.6] На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно

— либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;

— либо разделить одно из чисел пополам, если оно чётное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

5.5.13. [Arh — 2015.6] Иван-Царевич и Кощей нашли кошелёк с 12 монетами номиналом 1, 2, 3, 4, ..., 12 тугриков. Они решили разделить найденные деньги по следующим правилам:

1) Кощей достает из кошелька две монеты (какие пожелает) и показывает их Ивану-Царевичу;

2) Иван решает, сколько и каких монет отдать Кощею (одну, две или ни одной). Все монеты, не доставшиеся Кощею, возвращают в кошелёк.

Если сумма в кошельке не кратна 3, то делёж заканчивается и Иван забирает все монеты, которые остались в кошельке. Если сумма кратна 3, то процесс повторяется.

а) Может ли Иван действовать так, чтобы наверняка получить больше денег, чем Кощей?

б) На какую наибольшую сумму он может рассчитывать независимо от игры Кощея?

5.5.14. [Ust — 2014.7.6] Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

5.5.15. [Ust — 2009.7.6] Людоедом называется фантастическая шахматная фигура, которая может ходить как шахматный король — на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали, но не может ходить по диагонали. Два людоеда стоят на противоположных угловых полях шахматной доски и начинают ходить по очереди. Людоеду, вставшему на клетку, где уже стоит другой людоед, разрешается им пообедать. Кто кого съест при правильной игре и как ему надо для этого играть?

5.5.16. [Ust — 2003.7.6] Двое играют в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Побеждает тот, кто первым сумеет поставить пять одинаковых значков подряд (по горизонтали или вертикали). Докажите, что второй может играть так, чтобы не проиграть.

5.5.17. [Ust — 2016.7.7] Буратино выложил на стол 2016 спичек и предложил Арлекину и Пьеро сыграть в игру, беря по очереди спички со стола: Арлекин может своим ходом брать либо 5 спичек, либо 26, а Пьеро — либо 9, либо 23. Не дождавшись начала игры, Буратино ушёл, а когда он вернулся, партия уже закончилась. На столе осталось две спички, а проиграл тот, кто не смог сделать очередной ход. Хорошенько подумав, Буратино понял, кто ходил первым, и кто выиграл. Выясните это и вы!

5.5.18. [Ust — 2010.7.7] Почтальон Печкин не хотел отдавать посылку. Тогда Матроскин предложил ему сыграть в следующую игру: каждым ходом Печкин пишет в строку слева направо буквы, произвольно чередуя М и П, пока в строке не будет всего 11 букв. Матроскин после каждого его хода, если хочет, меняет местами любые две буквы. Если в итоге окажется, что записанное «слово» является палиндромом (то есть одинаково читается слева направо и справо налево), то Печкин отдаёт посылку. Сможет ли Матроскин играть так, чтобы обязательно получить посылку?

5.5.19. [Ust — 2018.6.9] В ряд записаны всевозможные правильные несократимые дроби, знаменатели которых не больше ста. Маша и Света ставят знаки «+» или «−» перед любой дробью, перед которой знак ещё не стоит. Они делают это по очереди, но известно, что Маше придётся сделать последний ход и вычислить результат действий. Если он получится целым, то Света даст ей шоколадку. Сможет ли Маша получить шоколадку независимо от действий Светы?

5.5.20. [Ust — 2019.6.9] В начале игры имеется набор из 2019 прямоугольных параллелепипедов размером $1\times1\times2$. За один ход игрок может выбрать два имеющихся параллелепипеда и склеить их по грани в один параллелепипед. Кто не сможет сделать ход — проиграл. Играют двое. Кто из них сможет выиграть, независимо от того, как будет играть соперник?

5.6 Турниры

5.6.1. [Mpr — 2008.7.2] В кубке Водоканала по футболу участвовали команды «Помпа», «Фильтр», «Насос» и «Шлюз». Каждая команда сыграла с каждой по одному разу (за победу давалось 3 очка, за ничью — 1, за проигрыш — 0). Команда «Помпа» набрала больше всех очков, команда «Шлюз» — меньше всех. Могло ли оказаться так, что «Помпа» обогнала «Шлюз» всего на 2 очка?

5.6.2. [Ust — 2002.6.4] Миша, Паша, Саша, Яша и Наташа провели турнир по настольному теннису, играя парами так, что каждые двое сыграли с каждыми двумя другими ровно один раз. В результате Саша проиграл 12 игр, а Яша — 6. Сколько игр выиграла Наташа? (Ничьих в теннисе не бывает.)

5.6.3. [Mpr — 1995.6.5] Есть 9 борцов разной силы. В поединке любых двух из них всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их на три команды по три борца так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья — над первой?

5.6.4. [Mpr — 2006.6.6] Пять футбольных команд провели турнир — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда?

5.6.5. [Ust — 2017.7.5] В турнире по волейболу каждая команда встречалась с каждой по одному разу. Каждая встреча состояла из нескольких партий — до трёх побед одной из команд. Если встреча заканчивалась со счётом $3:0$ или $3:1$, то выигравшая команда получала 3 очка, а проигравшая — 0. Если же счёт партий был $3:2$, то победитель получал 2 очка, а побеждённый — 1 очко. По итогам турнира оказалось, что команда «Хитрецы» набрала больше всех очков, а команда «Простаки» — меньше всех. Но «Хитрецы» выиграли меньше встреч, чем проиграли, а у «Простаков» наоборот, победных встреч оказалось больше, чем проигранных. При каком наименьшем количестве команд такое возможно?

5.6.6. [Mpr — 2002.7.6] В шахматном турнире на звание мастера спорта участвовало 12 человек, каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков. По итогам турнира звание мастера спорта присваивали, если участник набрал более 70% от числа очков, получаемых в случае выигрыша всех партий. Могли ли получить звание мастера спорта

а) 7 участников;

б) 8 участников?

5.6.7. [Ust — 2015.7.6] Среди 25 жирафов, каждые два из которых различного роста, проводится конкурс «Кто выше?». За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призёров конкурса?

5.6.8. [Ust — 2011.7.6] Команды провели турнир по футболу в один круг (каждая с каждой сыграла один раз, победа — 3 очка, ничья — 1, поражение — 0). Оказалось, что единоличный победитель набрал менее 50% от количества очков, возможного для одного участника. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

5.6.9. [Ust — 2010.7.6] В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника турнира сыграли по 11 партий, один — 10 партий, три — по 8 партий и два — по 7 партий. Может ли он оказаться прав?

5.6.10. [Ust — 2014.7.8] В гандбольном турнире в один круг (победа — 2 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0) приняло участие 16 команд. Все команды набрали разное количество очков, причём команда, занявшая 7 место, набрала 21 очко. Докажите, что победившая команда хотя бы один раз сыграла вничью.

5.6.11. [Ust — 2016.7.9] Среди актеров театра Карабаса Барабаса прошёл шахматный турнир. Каждый участник сыграл с каждым из остальных ровно один раз. За победу давали один сольдо, за ничью — полсольдо, за поражение не давалось ничего. Оказалось, что среди каждых трёх участников найдётся шахматист, заработавший в партиях с двумя другими ровно 1,5 сольдо. Какое наибольшее количество актеров могло участвовать в таком турнире?

5.6.12. [Ust — 2008.7.9] В шахматном турнире участвовали гроссмейстеры и мастера. По окончании турнира оказалось, что каждый участник набрал ровно половину своих очков в матчах с мастерами. Докажите, что количество участников турнира является квадратом целого числа. (Каждый участник сыграл с каждым по одной партии, победа — 1 очко, ничья — $1/2$ очка, поражение — 0 очков.)

5.7 Шахматные доски и фигуры

5.7.1. [Ust — 2002.6.2] Поставьте 5 фишек на доску размером 8×8, чтобы любой состоящий из девяти клеток квадрат содержал в точности одну фишку.

5.7.2. [Mpr — 1998.6.6] Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно двух других.

5.7.3. [Ust — 2002.6.6] Сколько фишек может стоять на шахматной доске, если любой квадрат, состоящий из девяти клеток, содержит в точности одну фишку?

5.7.4. [Ust — 2008.6.9] В левом нижнем углу клетчатой доски $n \times n$ стоит конь. Известно, что наименьшее число ходов, за которое конь может дойти до правого верхнего угла, равно наименьшему числу ходов, за которое он может дойти до правого нижнего угла. Найдите n.

5.7.5. [Ust — 2002.7.5] Какое наибольшее количество ладей может стоять на шахматной доске, если половина из них белые, половина — чёрные, и при этом никакая белая ладья не бьёт никакую чёрную?

5.7.6. [Ust — 2012.7.9] Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура — мини-слон, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон?

Глава 6

Алгебра

6.1 Уравнения в целых числах

6.1.1. [Мрг — 2003.6.1] Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мною (полных) месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился?

6.1.2. [Мрг — 2005.6.2]

На автобусе ездил Андрей
На кружок и обратно домой,
Заплатив 115 рублей,
Покупал он себе проездной.
В январе он его не достал,
И поэтому несколько дней
У шофёра билет покупал
Он себе за 15 рублей.
А в иной день кондуктор с него
Брал 11 только рублей.
Возвращаясь с кружка своего
Всякий раз шёл пешком наш Андрей.
За январь сколько денег ушло,
Посчитал бережливый Андрей:
С удивлением он получил
Аккурат 115 рублей!
Сосчитайте теперь поскорей,
Сколько раз был кружок в январе?

6.1.3. [Мрг — 1994.6.3] Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

6.1.4. [Mpr — 1994.7.2] Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 105 квартир?

а) Найдите хотя бы одно решение.

б) Найдите все решения и докажите, что других нет.

6.1.5. [Ust — 2017.6.4;7.4] Петров забронировал квартиру в доме-новостройке, в котором пять одинаковых подъездов. Изначально подъезды нумеровались слева направо, и квартира Петрова имела номер 636. Потом застройщик поменял нумерацию на противоположную (справа налево, см. рисунок). Тогда квартира Петрова стала иметь номер 242. Сколько квартир в доме? (Порядок нумерации квартир внутри подъезда не изменялся.)

1	2	3	4	5	$\longrightarrow$	5	4	3	2	1

$\boxed{985}$

6.1.6. [Mpr — 2001.6.5] Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль — 5, а Тофсла — 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются и один снежок не может попасть в двоих.)

6.1.7. [Ust — 2015.6.5] Может ли в равенстве

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

одно из чисел x, y или z быть однозначным, другое — двузначным, третье — трёхзначным?

6.1.8. [Mpr — 2017.6.5] Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

6.1.9. [Ust — 2002.6.5] Шехерезада стала учительницей математики и задала школьникам на дом 1001 задачу. За каждую решённую задачу она начисляла 2 балла, за каждую неправильно решённую задачу штрафовала на один балл, а за каждую задачу, которую школьник не решал, штрафовала на пятьдесят баллов. Шахрияр правильно решил меньше 900 задач и набрал 1514 баллов. Сколько задач правильно решил Шахрияр?

6.1.10. [Mpr — 1993.7.2] Зная, что число 1993 простое, выясните, существуют ли такие натуральные числа x и y, что

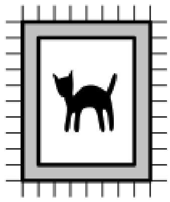
а) $x^2 - y^2 = 1993$;

б) $x^3 - y^3 = 1993$;

в) $x^4 - y^4 = 1993$?

6.1.11. [Mpr — 1996.7.3] Найдите хотя бы две пары натуральных чисел, для которых верно равенство $2x^3 = y^4$.

6.1.12. [Mpr — 2015.6.6] Юра начертил на клетчатой бумаге прямоугольник (по клеточкам) и нарисовал на нём картину. После этого он нарисовал вокруг картины рамку шириной в одну клеточку (см. рисунок). Оказалось, что площадь картины равна площади рамки. Какие размеры могла иметь Юрина картина? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)



6.1.13. [Mpr — 2005.7.4] Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?
б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.
в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня?

6.2 Суммирование

6.2.1. [Ust — 2013.7.7] Можно ли в записи

$$2013^2 - 2012^2 - \ldots - 2^2 - 1$$

некоторые минусы заменить на плюсы так, чтобы значение получившегося выражения стало равно 2013?

6.3 Алгебраические преобразования

6.3.1. [Ust — 2011.7.1] В кафе Цветочного города автомат выдаёт пончик, если ввести в него число x, при котором значение выражения $x^2 - 9x + 13$ отрицательно. А если ввести число x, при котором отрицательно значение выражения $x^2 + x - 5$, то автомат выдаёт сироп. Сможет ли Незнайка, введя в автомат всего одно число, получить и то и другое?

6.3.2. [Ust — 2019.7.7] Два математика решили пообедать в кафе. Общая стоимость их заказов составила 770 рублей. Первый математик сказал: «Суммарное количество блюд, которые мы заказали, — простое число». Второй математик ответил: «Если ты такой умный, то я отдам тебе пряник стоимостью 64 рубля и после этого средняя стоимость блюд у каждого из нас увеличится на один рубль». Сколько рублей потратил каждый из них на свой заказ?

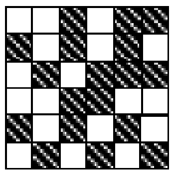
6.3.3. [Ust — 2015.7.9] На каждой из ста карточек записано по одному числу, отличному от нуля, так, что каждое число равно квадрату суммы всех остальных. Какие это числа?

Глава 7

Комбинаторика

7.1 Перебор вариантов

7.1.1. [Ust — 2004.6.3;7.2] Сколькими способами можно разрезать доску, показанную на рисунке, на прямоугольники из двух клеток так, чтобы в каждой части была закрашенная клетка?



7.2 Правило произведения

7.2.1. [Mpr — 1998.6.1;7.1] На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

7.2.2. [Mpr — 1997.7.1] Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

7.2.3. [Mpr — 1996.6.3] Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

7.2.4. [Mpr — 1996.7.4] Сколькими способами можно прочитать в таблице слово

а) КРОНА,

б) КОРЕНЬ,

начиная с буквы К и двигаясь вправо или вниз?

```
КРОНА  К
РОНА  КО
ОНА  КОР
НА  КОРЕ
А  КОРЕН
  КОРЕНЬ
```

7.2.5. [Ust — 2009.6.6] Мария Ивановна покупает 16 шариков для Последнего звонка. В магазине есть шарики трёх цветов: синего, красного и зелёного. Сколько существует вариантов различных покупок 16 шариков, если Мария Ивановна хочет, чтобы шарики каждого цвета составляли не менее четверти от количества всех шариков?

7.2.6. [Ust — 2009.6.8] Отец говорит сыну:

— Сегодня у нас у обоих день рождения, и ты стал ровно в 2 раза моложе меня.
— Да, и это восьмой раз за мою жизнь, когда я моложе тебя в целое число раз.

Сколько лет сыну, если отец не старше 75 лет?

7.3 Принцип Дирихле

7.3.1. [Ust — 2017.7.2] На кружок пришли четыре мальчика из 7А и четыре — из 7Б: три Лёши, три Вани и два Артёма. Могло ли оказаться так, что у каждого из них есть хотя бы один тёзка-одноклассник, пришедший на кружок?

7.3.2. [Ust — 2019.7.3] В магазине «Всё для путешествий» продаются 20 плееров по цене от 500 до 800 рублей и 20 наушников по цене от 50 до 140 рублей. Известно, что любой один предмет стоит целое число рублей и никакие два не стоят одинаково. Докажите, что два покупателя смогут приобрести по одному плееру с наушниками, потратив одинаковое количество денег.

7.3.3. [Ust — 2011.7.3] Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежали одному ребёнку, а среди любых пяти носков не более трёх имели одного хозяина. Сколько могло быть детей и сколько носков могло принадлежать каждому ребёнку?

7.3.4. [Mpr — 2019.6.5] Вокруг круглого озера через равные промежутки растут 2019 деревьев: 1009 сосен и 1010 елок. Докажите, что обязательно найдется дерево, рядом с которым растет сосна и с другой стороны от которого через одно дерево тоже растет сосна.

7.3.5. [Mpr — 1994.6.7] Среди любых десяти из шестидесяти школьников найдётся три одноклассника. Обязательно ли среди всех шестидесяти школьников найдётся
а) 15 одноклассников;
б) 16 одноклассников?

7.3.6. [Mpr — 1994.7.6] В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

7.3.7. [Ust — 2019.7.9] Сколькими способами можно заполнить цифрами клетки квадрата размером 3×3 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма цифр была равна 7, а ненулевые цифры не повторялись?

216

7.4 Разные комбинаторные задачи

7.4.1. [Mpr — 1996.7.5] Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

7.4.2. [Mpr — 1990.6.5;7.5] Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше — философов или математиков?

7.4.3. [Ust — 2015.7.7] У Пети есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Петя считает, что различных 12-вагонных поездов он сможет составить больше, чем 11-вагонных. Не ошибается ли Петя? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.)

Глава 8

Графы

8.1 Степень вершины

8.1.1. [Mpr — 1992.7.3] Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?

8.1.2. [Ust — 2014.6.4] Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

8.1.3. [Ust — 2013.6.8] Можно ли нарисовать 1006 различных 2012-угольников, у которых все вершины общие, но при этом ни у каких двух нет ни одной общей стороны?

8.1.4. [Mpr — 2017.7.6] Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

8.2 Обход графов

8.2.1. [Mpr — 1992.6.3] Как, не отрывая карандаша от бумаги, провести шесть отрезков таким образом, чтобы оказались зачёркнутыми 16 точек, расположенных в вершинах квадратной сетки 4×4?

8.2.2. [Mpr — 1995.6.6] В квадрате 6×6 отмечают несколько клеток так, что из любой отмеченной можно пройти в любую другую отмеченную, переходя только через общие стороны отмеченных клеток. Отмеченную клетку называют концевой, если она граничит по стороне ровно с одной отмеченной. Отметьте несколько клеток так, чтобы получилось а) 10; б) 11; в) 12 концевых клеток.

8.2.3. [Мрг — 1991.6.6] Метро города Урюпинска состоит из трёх линий и имеет по крайней мере две конечные станции и по крайней мере два пересадочных узла, причём ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую из остальных можно перейти по крайней мере в двух местах.

Нарисуйте пример такой схемы метро, если известно, что это можно сделать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза один и тот же отрезок.

8.2.4. [Мрг — 1994.6.8] Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

Глава 9

Наглядная геометрия

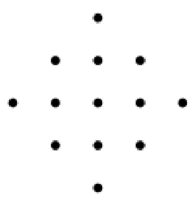
9.1 Наглядная геометрия на плоскости

9.1.1. [Mpr — 1990.5.2] Обязательно ли равны два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

9.1.2. [Ust — 2017.6.3] В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2, а когда их положили в соседние углы, то 14 м^2. Каковы размеры зала?

$\boxed{19 \times 19 \text{ м}^2}$

9.1.3. [Mpr — 2000.6.4] Зачеркните все 13 точек на рисунке пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.



9.1.4. [Mpr — 1990.5.5] Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы от каждой на расстоянии 1 находилось ровно три точки.

9.1.5. [Mpr — 2010.7.2] На вертикальную ось надели несколько колёс со спицами. Вид сверху изображён на рис. 1. После этого колёса повернули. Новый вид сверху изображён на рис. 2. Могло ли колес быть: а) три; б) два?

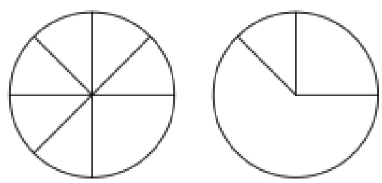
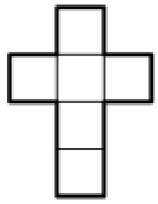


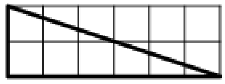
Рис. 1 **Рис. 2**

9.1.6. [Mpr — 2004.7.2] Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть? (Если да, нарисуйте пример, если нет, обоснуйте ответ.)

9.1.7. [Ust — 2015.7.2] Петя склеил бумажный кубик и записал на его гранях числа от 1 до 6 так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях были одинаковыми. Вася хочет разрезать этот кубик так, чтобы получить развёртку, показанную на рисунке. При этом Вася старается, чтобы суммы чисел по горизонтали и по вертикали в этой развёртке отличались как можно меньше. Какая самая маленькая положительная разность может у него получиться, независимо от того, каким образом расставлял числа Петя?



9.1.8. [Mpr — 2000.7.3] Дан прямоугольный треугольник (см. рисунок). Приложите к нему какой-нибудь треугольник (эти треугольники должны иметь общую сторону, но не должны перекрываться даже частично) так, чтобы получился треугольник с двумя равными сторонами.



9.1.9. [Mpr — 1992.7.4] Может ли горящая в комнате свеча не освещать полностью ни одну из её стен, если в комнате а) 10 стен, б) 6 стен? (Комната является многоугольником.)

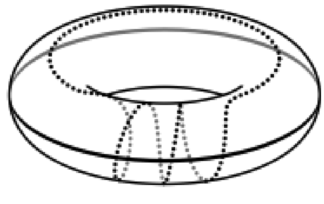
9.1.10. [Mpr — 2001.7.4] В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь, так чтобы флажок закрывал дырку.

9.1.11. [Ust — 2017.6.9;7.9] У Вики есть четыре фигурки, у Алины есть квадрат, а у Полины есть квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться так, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (Квадраты складываются без просветов и наложений.)

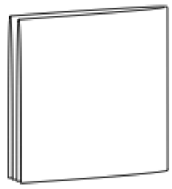
9.2 Наглядная геометрия в пространстве

9.2.1. [Ust — 2009.6.2] Куб, стоящий на плоскости, несколько раз перекатили через его рёбра, после чего он вернулся на прежнее место. Обязательно ли он стоит на той же грани?

9.2.2. [Mpr — 2016.7.1] По поверхности планеты, имеющей форму бублика, проползли, оставляя за собой следы, две улитки: одна по внешнему экватору, а другая по винтовой линии (см. рисунок). На сколько частей разделили поверхность планеты следы улиток? (Достаточно написать ответ.)



9.2.3. [Mpr — 2003.7.2] Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз (см. рисунок). Получившийся квадратик разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распасться а) на 2 части? б) на 3 части? в) на 4 части? г) на 5 частей? Если да — нарисуйте такой разрез, если нет — напишите слово «нельзя».

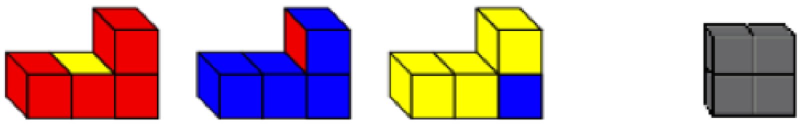


9.2.4. [Mpr — 1993.6.3] Как из семи «уголков», каждый из которых склеен из трёх кубиков $1 \times 1 \times 1$, и шести отдельных кубиков $1 \times 1 \times 1$ составить большой куб $3 \times 3 \times 3$?

Можно ли это сделать так, чтобы все отдельные кубики оказались в серединах граней большого куба?

9.2.5. [Mpr — 2017.6.3;7.3] Среди всех граней восьми одинаковых по размеру кубиков треть синие, а остальные — красные. Из этих кубиков сложили большой куб. Теперь среди видимых граней кубиков ровно треть — красные. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, полностью красный снаружи.

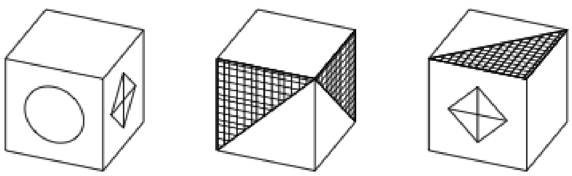
9.2.6. [Ust — 2017.7.3] У Саши было четыре раскрашенных кубика. Расставляя их по-разному, он по очереди сфотографировал три фигуры (рис. слева). Затем Саша сложил из них параллелепипед размером $2 \times 2 \times 1$ и сделал его чёрно-белое фото (рис. справа). Все видимые на этом фото грани кубиков одного и того же цвета. Какого?



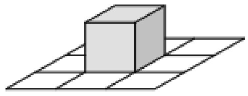
9.2.7. [Mpr — 1999.6.4;7.3] Из Москвы вылетел вертолёт, который пролетел 300 км на юг, потом 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее её или на той же широте? Оказался ли он восточнее Москвы, западнее Москвы или на той же долготе?

9.2.8. [Mpr — 1994.6.4] Составьте куб $3 \times 3 \times 3$ из красных, жёлтых и зелёных кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы в любом бруске $3 \times 1 \times 1$ были кубики всех трёх цветов.

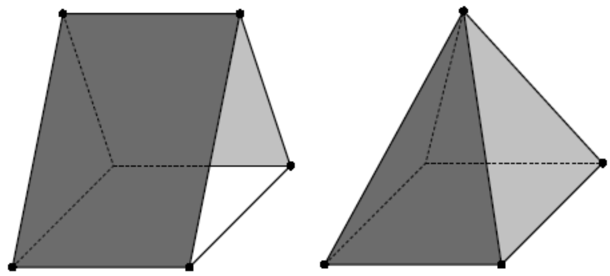
9.2.9. [Mpr — 1997.6.5] Придумайте раскраску граней кубика, чтобы в трёх различных положениях он выглядел, как показано на рисунке. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развёртку.)



9.2.10. [Ust — 2006.6.5] Дан кубик с ребром 1. Одну из его граней склеили с центральной клеткой квадрата 3×3 (см. рисунок). Объясните, как завернуть кубик в этот лист бумаги, если разрешается (только по линиям сетки) делать надрезы и сгибать лист.



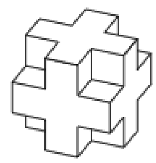
9.2.11. [Ust — 2008.7.5] Иван Иванович построил сруб, квадратный в основании, и собирается покрывать его крышей. Он выбирает между двумя крышами одинаковой высоты: двускатной и четырёхскатной (см. рисунки). На какую из этих крыш понадобится больше жести?



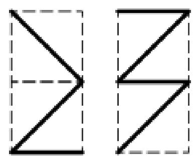
9.2.12. [Ust — 2003.7.5] Можно ли оклеить поверхность куба прямоугольниками так, чтобы любой прямоугольник граничил (по отрезку) ровно с пятью другими?

9.2.13. [Mpr — 1998.7.6](Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две части, в которые можно завернуть куб $2 \times 2 \times 2$.

9.2.14. [Mpr — 1993.7.6] Из кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ удалили центральный шарнир и восемь угловых кубиков. Можно ли оставшуюся фигуру из 18 кубиков составить из шести брусков размером $3 \times 1 \times 1$?



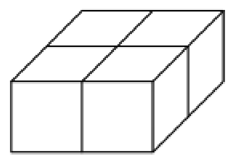
9.2.15. [Mpr — 1997.7.6] Если смотреть на аквариум спереди, то рыбка проплыла, как показано на левом рисунке. А если справа — то как на правом рисунке. Нарисуйте вид сверху.



9.2.16. [Ust — 2009.7.7] В каждой вершине куба сидело по мухе. Потом все мухи разом взлетели и сели по одной в каждую вершину в каком-то другом порядке. Докажите, что найдутся три мухи, которые в начальном и конечном положении сидели в вершинах равных треугольников.

9.2.17. [Ust — 2015.6.8] Есть 16 кубиков, каждая грань которых покрашена в белый, чёрный или красный цвет (различные кубики могут быть покрашены по-разному). Посмотрев на их раскраску, барон Мюнхгаузен сказал, что может так поставить их на стол, что будет виден только белый цвет, может поставить так, что будет виден только чёрный, а может и так, что будет виден только красный. Могут ли его слова быть правдой?

9.2.18. [Ust — 2014.6.9] Четыре одинаковых кубика расположили на столе так, как показано на рисунке. Одна из граней каждого кубика покрашена в чёрный цвет. За один шаг разрешается повернуть одинаковым образом оба кубика из одного ряда (вертикального или горизонтального). Докажите, что, независимо от начального расположения чёрных граней, за несколько таких шагов можно расположить кубики чёрными гранями вверх.

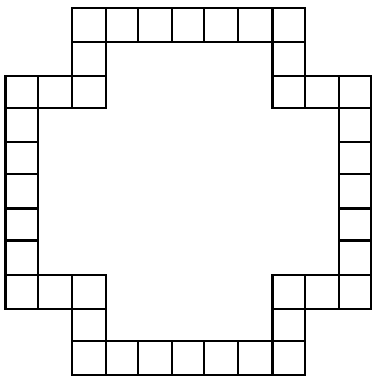


Глава 10

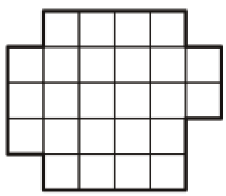
Комбинаторная геометрия

10.1 Разрезания

10.1.1. [Mpr — 2012.6.1] Разрежьте рамку на 16 равных частей.



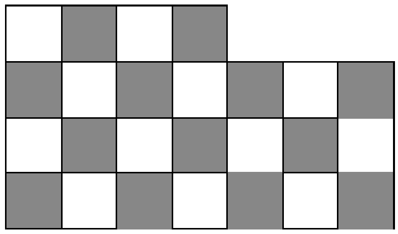
10.1.2. [Arh — 2018.1] Разрежьте фигуру на рисунке на три части, не являющиеся прямоугольниками, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Линии разреза могут идти только по сторонам клеток. Полученные части можно поворачивать, но нельзя переворачивать.



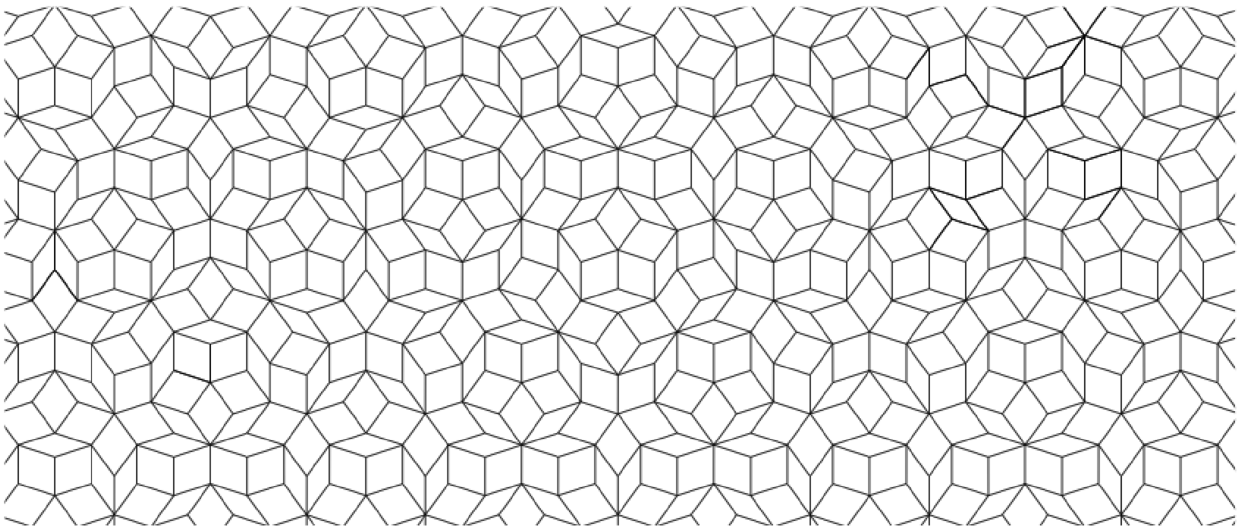
10.1.3. [Ust — 2012.6.1] Покажите, как разрезать квадрат размером 5×5 клеток на «уголки» шириной в одну клетку так, чтобы все «уголки» состояли из разного количества клеток. (*Длины «сторон» уголка могут быть как одинаковыми, так и различными*).

10.1.4. [Ust — 2019.6.1] Придумайте фигуру из двадцати клеток, которую по сторонам клеток можно разрезать на пять равных частей, но нельзя разрезать на десять равных частей.

10.1.5. [Ust — 2010.6.1;7.2] У бабушки была клетчатая тряпочка (см. рисунок). Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона — лицевая, а другая — изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).



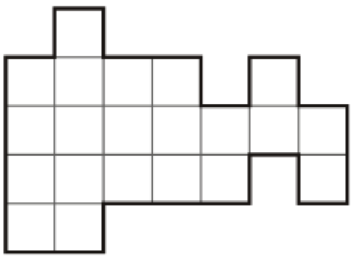
10.1.6. [Mpr — 2011.7.1] Ниже приведён фрагмент мозаики, которая состоит из ромбиков двух видов: «широких» и «узких» (см. рис.).



Нарисуйте, как по линиям мозаики вырезать фигуру, состоящую ровно из 3 «широких» и 8 «узких» ромбиков. (Фигура не должна распадаться на части.)

10.1.7. [Arh — 2015.1] Упорный Вася хочет из клетчатой доски 8×8 вырезать 12 прямоугольников 1×2 так, чтобы из оставшейся части доски невозможно было вырезать прямоугольник 1×3. (Резать можно только по линиям сетки). И у него это получилось! Покажите на рисунке, как он мог это сделать.

10.1.8. [Arh — 2016.1] Закрасьте на рисунке одну клетку и незакрашенную часть разрежьте по линиям сетки на две одинаковые части.

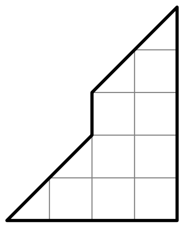


10.1.9. [Ust — 2016.7.1] Мальвина велела Буратино разрезать квадрат на 7 прямоугольников (необязательно различных), у каждого из которых одна сторона в два раза больше другой. Выполнимо ли это задание?

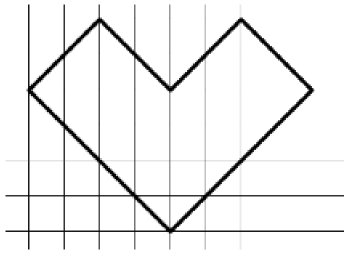
10.1.10. [Ust — 2004.7.1] Нарисуйте шестиугольник, который жюри не сможет разрезать на два четырехугольника.

10.1.11. [Ust — 2003.7.1] На клетчатой бумаге нарисован квадрат. Известно, что его можно разрезать на прямоугольники размером 1×6 клеток. Докажите, что этот квадрат можно также разрезать на уголки из трёх клеток.

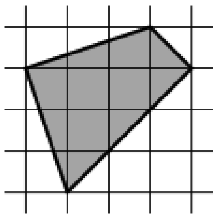
10.1.12. [Mpr — 2006.6.2] Разрежьте фигуру на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.



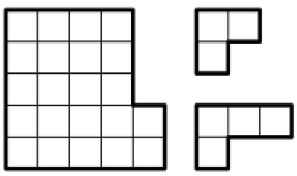
10.1.13. [Mpr — 2009.6.2] Разрежьте фигуру на рисунке на восемь одинаковых частей.



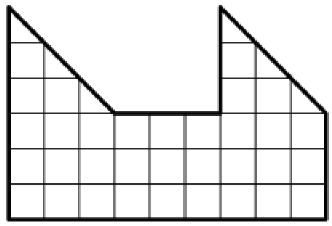
10.1.14. [Mpr — 2019.6.2] Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на четыре одинаковые части.



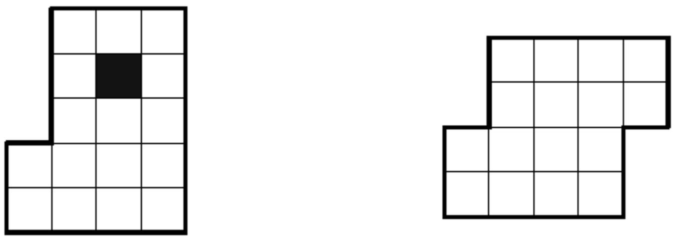
10.1.15. [Mpr — 2002.6.2;7.2] Незнайка разрезал фигуру на трёхклеточные и четырёхклеточные уголки, нарисованные справа от неё. Сколько трёхклеточных уголков могло получиться?



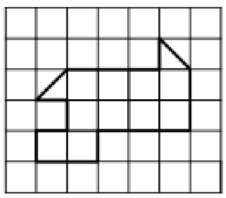
10.1.16. [Mpr — 1995.6.2] Разрежьте изображённую на рисунке фигуру на две одинаковые части.



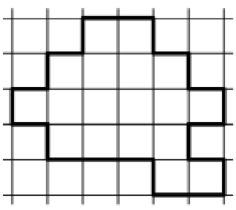
10.1.17. [Ust — 2008.6.2] Разрежьте фигуру с вырезанным квадратиком на две одинаковые части, из которых можно составить вторую фигуру. Части разрешается и поворачивать, и переворачивать.



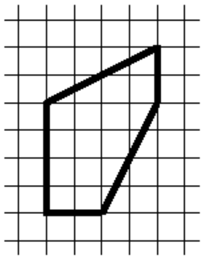
10.1.18. [Ust — 2006.6.2] Добавьте к фигуре, изображённой на рисунке, две клетки (по линиям сетки) так, чтобы после этого её можно было разрезать по линиям сетки на две равные части.



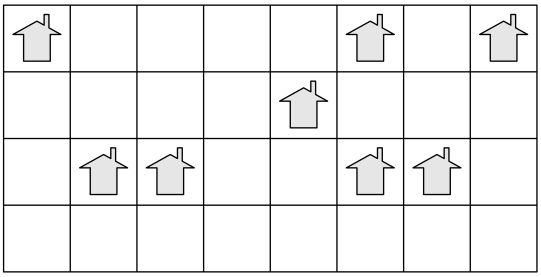
10.1.19. [Mpr — 1999.7.2] Разрежьте фигуру (по границам клеток) на три равные (одинаковые по форме и величине) части.



10.1.20. [Mpr — 2006.7.2] Разрежьте изображённый на рисунке пятиугольник на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.



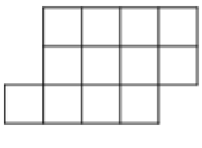
10.1.21. [Arh — 2012.2] Требуется разбить участок земли на 8 одинаковых дачных участков (то есть совпадающих как по площади, так и по форме). Границы участков должны проходить по линиям сетки, на каждом участке должен располагаться домик.



10.1.22. [Mpr — 2012.7.2] Квадрат разрезали на несколько частей. Переложив эти части, из них всех сложили треугольник. Затем к этим частям добавили еще одну фигурку — и оказалось, что и из нового набора фигурок можно сложить как квадрат, так и треугольник. Покажите, как такое могло бы произойти (нарисуйте, как именно эти два квадрата и два треугольника могли бы быть составлены из фигурок).

10.1.23. [Ust — 2008.7.2] Квадрат разрезали на двенадцать прямоугольных треугольников. Могут ли десять из них оказаться равными друг другу, а два оставшихся — отличаться и от них, и друг от друга?

10.1.24. [Ust — 2006.7.2] Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две одинаковые части тремя способами (резать можно только по линиям сетки).

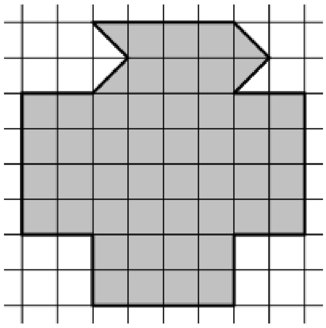


10.1.25. [Mpr — 1991.6.3] Как одним прямолинейным разрезом рассечь два лежащих на сковороде квадратных блина на две равные части каждый?

10.1.26. [Ust — 2003.6.3] Существует ли 10-угольник, который можно разрезать на 5 треугольников?

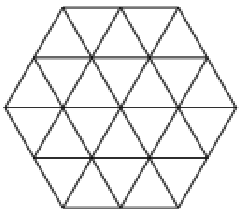
10.1.27. [Mpr — 2008.6.4] Разрежьте какой-нибудь квадрат на квадратики двух разных размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших.

10.1.28. [Mpr — 2017.6.4] Разрежьте фигуру на двенадцать одинаковых частей.



10.1.29. [Ust — 2013.6.5] Мачеха приказала Золушке сшить квадратное одеяло из пяти прямоугольных кусков так, чтобы длины сторон всех кусков были попарно различны и составляли целое число дюймов. Сможет ли Золушка выполнить задание без помощи феи-крёстной?

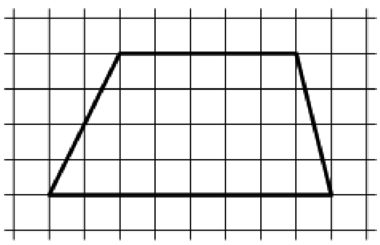
10.1.30. [Mpr — 2015.6.4;7.3] Разрежьте нарисованный шестиугольник на четыре одинаковые фигуры. Резать можно только по линиям сетки.



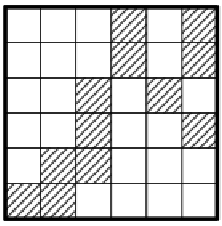
10.1.31. [Ust — 2005.7.3] Разрежьте по клеточкам квадрат 5×5 на три части с равными периметрами.

10.1.32. [Mpr — 2003.6.4] Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых — целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника — тоже целое число метров?

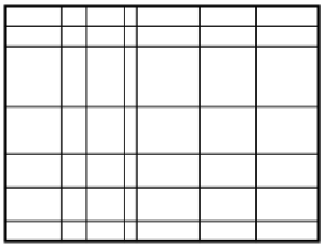
10.1.33. [Mpr — 1998.6.4] Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две части, из которых можно сложить треугольник.



10.1.34. [Mpr — 1997.6.4] Разрежьте изображённую на рисунке доску на четыре одинаковые части, чтобы каждая из них содержала три заштрихованные клетки.



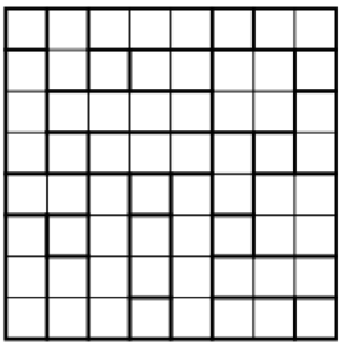
10.1.35. [Mpr — 2003.7.4] Прямоугольник разрезали шестью вертикальными и шестью горизонтальными разрезами на 49 прямоугольников (см. рисунок). Оказалось, что периметр каждого из получившихся прямоугольников — целое число метров. Обязательно ли периметр исходного прямоугольника — целое число метров?



10.1.36. [Ust — 2003.7.4] Существует ли 10-угольник, который одной прямой можно разбить на 6 частей?

10.1.37. [Mpr — 1994.6.5] Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и тремя различными сторонами.

10.1.38. [Mpr — 2010.6.5] Саша разрезал шахматную доску 8×8 по границам клеток на 30 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались даже углами (см. рис.). Попытайтесь улучшить его достижение, разрезав доску на большее число прямоугольников с соблюдением того же условия.



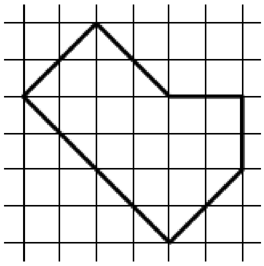
10.1.39. [Mpr — 1996.6.5] Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника:

а) какой-нибудь выпуклый пятиугольник;

б) правильный пятиугольник?

10.1.40. [Ust — 2009.6.5] Разрежьте фигуру на рисунке на три равные части (не обязательно по линиям сетки).

(*Равными называются части, которые можно совместить, наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.*)

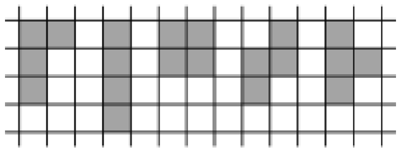


10.1.41. [Ust — 2013.7.5] Разрежьте по клеточкам квадрат 7×7 на девять прямоугольников (не обязательно различных), из которых можно будет сложить любой прямоугольник со сторонами, не превосходящими 7.

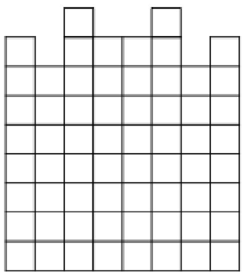
10.1.42. [Ust — 2018.7.5] Можно ли разрезать равносторонний треугольник на три равных девятиугольника?

10.1.43. [Mpr — 2018.6.6] Разрежьте квадрат 9×9 клеток по линиям сетки на три фигуры равной площади так, чтобы периметр одной из частей оказался равным сумме периметров двух других.

10.1.44. [Mpr — 2018.7.5] Фигурки из четырёх клеток называются тетрамино. Они бывают пяти видов (см. рис.). Существует ли такая фигура, что при любом выборе вида тетрамино эту фигуру можно составить, используя тетраминошки только выбранного вида? (Переворачивать тетраминошки можно.)

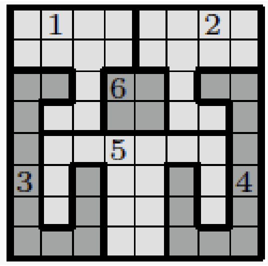


10.1.45. [Mpr — 1995.7.6] Разрежьте изображённую фигуру на две части, из которых можно сложить целый квадрат 8×8.



10.1.46. [Ust — 2010.6.7] Вася называет прямоугольник, стороны которого отличаются на 1, *почти-квадратом.* (Например, прямоугольник со сторонами 5 и 6 — это почти-квадрат.) Существует ли почти-квадрат, который можно разрезать на 2010 почти-квадратов?

10.1.47. [Ust — 2016.6.8] На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8? (*Все разрезы должны проходить по линиям сетки.*)



10.1.48. [Ust — 2011.6.9] Дима разрезал картонный квадрат 8×8 по границам клеток на шесть частей (см. рисунок). Оказалось, что квадрат остался *крепким*: если положить его на стол и потянуть (вдоль стола) за любую часть в любом направлении, то весь квадрат потянется вместе с этой частью.

Покажите, как разрезать такой квадрат по границам клеток не менее, чем на 27 частей, чтобы квадрат оставался крепким и в каждой части было не более 16 клеток.

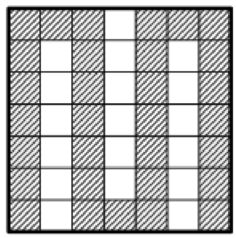
10.1.49. [Ust — 2009.6.9] Дан квадрат $2n \times 2n$. Вася закрашивает в нём две любые клетки. Всегда ли Петя сможет разрезать этот квадрат на две равные части так, чтобы закрашенные клетки были в разных половинках?

10.2 Раскраски

10.2.1. [Mpr — 2000.6.2;7.1] В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по три закрашенных клетки.

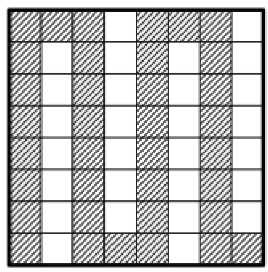
10.2.2. [Mpr — 1990.6.1;7.1] Раскрасьте плоскость в три цвета так, чтобы на каждой прямой были точки не более, чем двух цветов, и каждый цвет был бы использован.

10.2.3. [Mpr — 1999.6.3] Квадрат 4×4 разделён на 16 клеток. Раскрасьте эти клетки в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой чёрной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один чёрный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)



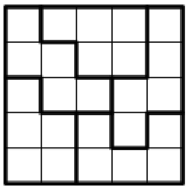
10.2.4. [Mpr — 2002.6.4] Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 7×7, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна соседствовать ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 31 клетку.

Побейте его рекорд — закрасьте а) 32 клетки; б) 33 клетки.



10.2.5. [Mpr — 2002.7.5] Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 8×8, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна — ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 36 клеток. Побейте его рекорд! (Жюри умеет закрашивать 42 клетки!)

10.2.6. [Mpr — 1996.6.6] Покрасьте клетки доски 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке встречались все цвета.



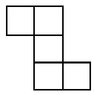
10.2.7. [Mpr — 2001.6.6] Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно, соблюдая это условие, закрасить

а) 26 клеток;

б) 28 клеток.

(В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

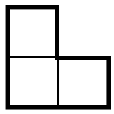
10.2.8. [Ust — 2004.6.7] Клетки тетрадного листа раскрашены в восемь цветов. Докажите, что найдется фигура вида, указанного на рисунке, внутри которой есть клетки одного цвета.



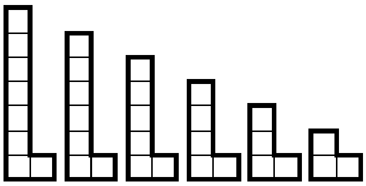
10.3 Замощения

10.3.1. [Ust — 2018.6.2] Конструктор состоит из плиток размерами 1×3 и 1×4. Из всех имеющихся плиток Федя сложил два прямоугольника размерами 2×6 и 7×8. Его брат Антон утащил по одной плитке из каждого сложенного прямоугольника. Сможет ли Федя из оставшихся плиток собрать прямоугольник размером 12×5?

10.3.2. [Mpr — 2011.6.2] Разрежьте квадрат 6×6 клеточек на трёхклеточные уголки (см. рисунок) так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3.

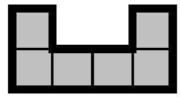


10.3.3. [Ust — 2005.6.3] Из набора уголков (рис.) сложите прямоугольник.



10.3.4. [Mpr — 1990.5.4] Замостите плоскость одинаковыми а) пятиугольниками; б) семиугольниками.

10.3.5. [Mpr — 2005.6.4] Незнайка разместил без наложений в квадрате 10×10 только 13 фигур («скобок»), изображённых на рисунке. Попробуйте разместить больше.

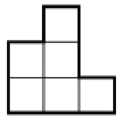


10.3.6. [Mpr — 2004.6.4;7.5] Сложите из фигур, изображённых на рисунке,

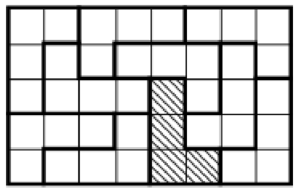
а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3;

б) прямоугольник размером 9×12.

(Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.)



10.3.7. [Mpr — 2003.6.5] В распоряжении юного паркетчика имеется 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из 4 квадратов и имеет форму буквы Г (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером 5×8? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рисунке изображено неверное решение: заштрихованная плитка неправильно ориентирована.)

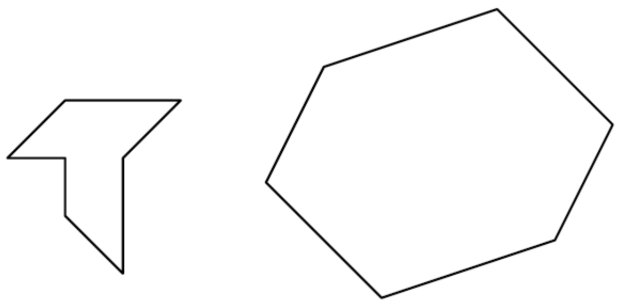


10.3.8. [Ust — 2016.6.5] Вася нарисовал карандашом разбиение клетчатого прямоугольника на прямоугольники размером 3×1 (тримино), закрасил ручкой центральную клетку каждого из получившихся прямоугольников, после чего стер карандашные линии. Всегда ли можно восстановить исходное разбиение?

10.3.9. [Mpr — 1999.6.6] На плоскости нарисован чёрный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть чёрного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

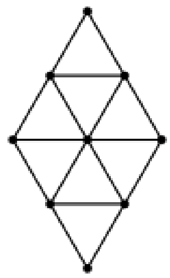
10.3.10. [Ust — 2004.7.7] Из доски 64×64 вырезали угловые клетки. Как расчертить эту доску на уголки из трёх клеток так, чтобы из нее нельзя было вырезать прямоугольника, состоящего из цельных уголков?

10.3.11. [Ust — 2008.7.8] Предложенные вам четыре одинаковые фигуры (см. рисунок слева) требуется уложить в шестиугольник (см. рисунок справа) так, чтобы они не выступали за его границы и не накладывались друг на друга (даже частично).

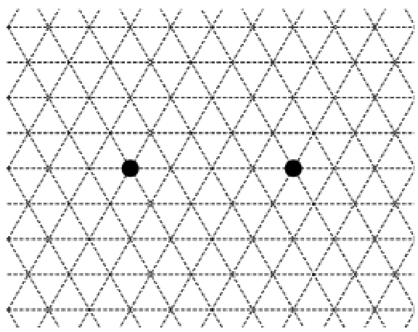


10.4 Целочисленные решётки

10.4.1. [Ust — 2012.6.2] Из 16 спичек сложен ромб со стороной в две спички, разбитый на треугольники со стороной в одну спичку (см. рисунок). А сколько спичек потребуется, чтобы сложить ромб со стороной в 10 спичек, разбитый на такие же треугольники со стороной в одну спичку?



10.4.2. [Ust — 2014.6.2] Коля и Макс живут в городе с треугольной сеткой дорог (см. рисунок). В этом городе передвигаются на велосипедах, при этом разрешается поворачивать только налево. Коля поехал в гости к Максу и по дороге сделал ровно 4 поворота налево. На следующий день Макс поехал к Коле и приехал к нему, совершив только один поворот налево. Оказалось, что длины их маршрутов одинаковы. Изобразите, каким образом они могли ехать (дома Коли и Макса отмечены).

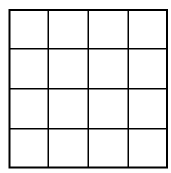


10.4.3. [Mpr — 2006.7.6] Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника

а) 8×9 клеток?

б) 8×10 клеток?

10.4.4. [Ust — 2009.7.8] Есть 40 одинаковых шнуров. Если поджечь любой шнур с одной стороны, он сгорает, а если с другой — не горит. Вася раскладывает шнуры в виде квадрата (см. рисунок, каждый шнур — сторона клетки). Затем Петя расставляет 12 запалов. Сможет ли Вася разложить шнуры так, что Пете не удастся сжечь все шнуры?

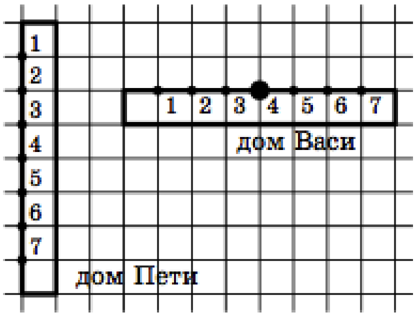


10.4.5. [Ust — 2010.7.8] Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2009, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Докажите, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4.

10.5 Геометрия на клетчатой бумаге

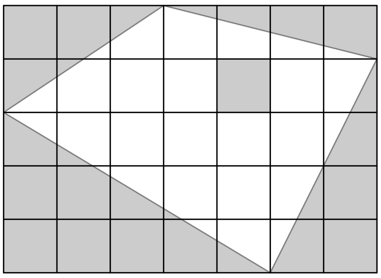
10.5.1. [Mpr — 1993.7.1] Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

10.5.2. [Mpr — 2009.7.1] Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рисунке). Вася живет в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путем (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя.

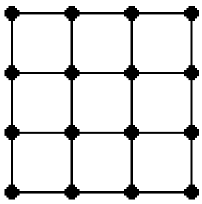


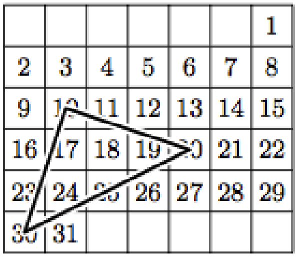
10.5.3. [Ust — 2013.6.2] Из каждого клетчатого квадрата со стороной 3 клетки вырезается фигура из пяти клеток с таким же периметром, как у квадрата, но площадью 5 клеток. Саша утверждает, что сможет вырезать 7 таких различных фигур (никакие две из них не совместятся при наложении, даже если фигуры переворачивать). Не ошибается ли он?

10.5.4. [Arh — 2013.2] Имение маркиза Карабаса имеет форму прямоугольника (см. рисунок). Часть участка занимает лес (выделен тёмным), остальное — пастбища. Чего у маркиза больше — леса или пастбищ? Ответ объясните.



10.5.5. [Mpr — 2005.7.3] Зачеркните все шестнадцать точек, изображённых на рисунке, шестью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя отрезков по линиям сетки.



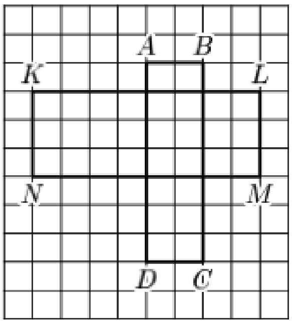


10.5.6. [Mpr — 2006.7.3] Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (см. рисунок) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа?

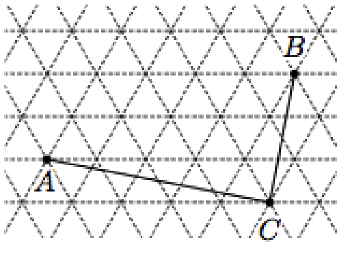
10.5.7. [Mpr — 2007.7.4] На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Отметьте ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площади 6 клеток.

10.5.8. [Mpr — 1999.6.5;7.5] Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в углах клеток, две медианы которого перпендикулярны. (Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны.)

10.5.9. [Ust — 2006.6.8] Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ имеют соответственно параллельные стороны и расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади четырёхугольников $ALCN$ и $KBMD$ равны.



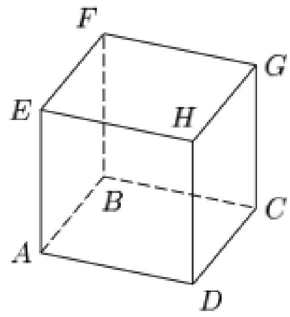
10.5.10. [Ust — 2015.7.8] На сетке из равносторонних треугольников построен угол ACB (см. рисунок). Найдите его величину.



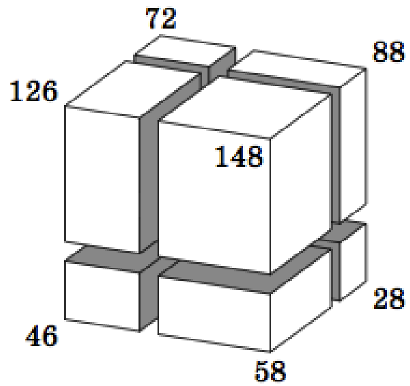
10.6 Шахматная раскраска

10.6.1. [Mpr — 1990.6.3;7.3] Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?

10.6.2. [Mpr — 2000.6.5] В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трёх соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа. (В решении достаточно написать четыре тройки вершин, в которые последовательно стреляют охотники.)



10.6.3. [Mpr — 2011.6.6] Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рисунке у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска?



10.6.4. [Arh — 2014.5] Вася оклеил (без наложений и разрывов) грани куба $5 \times 5 \times 5$ бумажными полосками 2×1, причём некоторые полоски оказались согнуты пополам (остальные полоски не согнуты). Каждая полоска покрывает ровно две клетки. Могло ли число согнутых полосок оказаться чётным?

10.6.5. [Mpr — 2001.7.5] Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

10.6.6. [Mpr — 2003.7.6] Куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 единичных кубиков. Можно ли побывать в каждом кубике по одному разу, двигаясь следующим образом: из кубика можно пройти в любой кубик, имеющий с ним общую грань, причём запрещено ходить два раза подряд в одном направлении?

10.6.7. [Ust — 2011.7.7] На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают с вершинами куба. Какое наименьшее количество звеньев этой ломаной может совпасть с рёбрами куба?

Глава 11

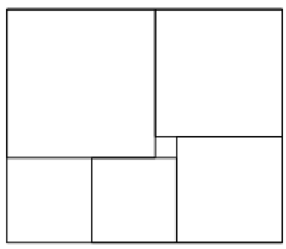
Планиметрия

11.1 Отрезки и углы

11.1.1. [Ust — 2018.6.5] Лист бумаги имеет форму круга. Можно ли провести на нем пять отрезков, каждый из которых соединяет две точки на границе листа так, чтобы среди частей, на которые эти отрезки делят лист, нашлись пятиугольник и два четырёхугольника?

11.2 Прямоугольники и квадраты

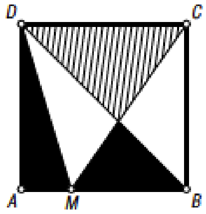
11.2.1. [Mpr — 1995.6.3] Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



11.2.2. [Ust — 2005.6.4] Длину прямоугольника увеличили на 1 м, а ширину уменьшили на 1 мм. Могла ли при этом площадь прямоугольника уменьшиться?

11.2.3. [Mpr — 1993.6.6] Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E, B и F, C и K, D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?

11.2.4. [Ust — 2005.6.9] На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка M (рис.). Докажите, что площадь заштрихованного треугольника равна сумме площадей чёрных треугольников.



11.2.5. [Mpr — 2017.7.4] Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC.

11.3 Построения

11.3.1. [Ust — 2009.7.2] У листа бумаги только один ровный край. Лист согнули, потом разогнули обратно. A — общая точка ровного края и линии сгиба. Постройте перпендикуляр к этой линии в точке A. Сделайте это без помощи чертёжных инструментов, а лишь перегибая бумагу.

11.3.2. [Mpr — 2002.7.4] У Васи есть пластмассовый угольник (без делений) с углами 30°, 60° и 90°. Ему нужно построить угол в 15°. Как это сделать, не используя других инструментов?

11.3.3. [Ust — 2010.7.5] Петя вырезал из пластмассы неравносторонний треугольник. Покажите, каким образом можно, пользуясь только этим инструментом как шаблоном, построить биссектрису какого-нибудь угла треугольника, равного вырезанному.

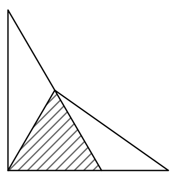
11.4 Неравенство треугольника

11.4.1. [Ust — 2019.7.5] Прямоугольный лист бумаги согнули по диагонали. Может ли периметр полученного пятиугольника оказаться равным периметру исходного листа?

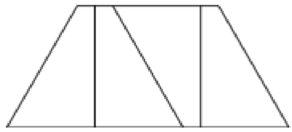
11.5 Разные планиметрические задачи

11.5.1. [Mpr — 1990.6.2;7.2] Изобразите множество середин всех отрезков, концы которых лежат а) на данной полуокружности; б) на диагоналях данного квадрата.

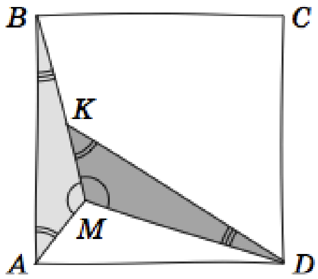
11.5.2. [Mpr — 2014.7.2] Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рисунке (при этом вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что заштрихованный треугольник равносторонний.



11.5.3. [Mpr — 1997.7.3] Четырёхугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 имеет две параллельные стороны и разбит на четыре одинаковые фигуры (см. рисунок). В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему.

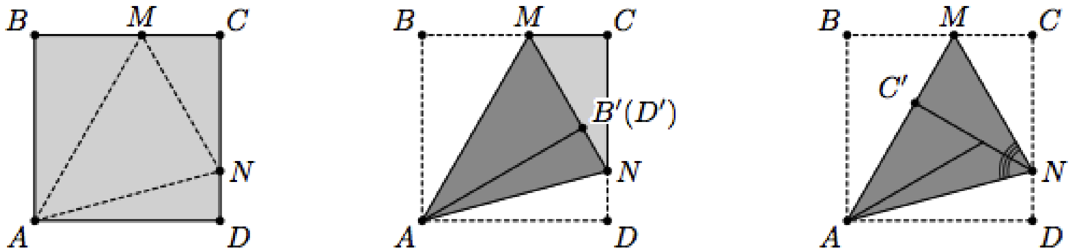


11.5.4. [Mpr — 2019.7.3] Два равных треугольника расположены внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите их углы.



120°, 45°, 15°

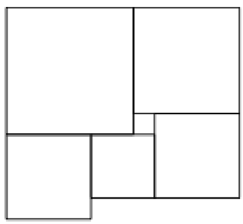
11.5.5. [Ust — 2013.7.3] Из квадратного листа бумаги сложили треугольник (см. рисунки). Найдите отмеченный угол.



75°

11.5.6. [Ust — 2014.7.3] Петя утверждает, что он сумел согнуть бумажный равносторонний треугольник так, что получился четырёхугольник, причем всюду трёхслойный. Как это могло получиться?

11.5.7. [Mpr — 1995.7.3] Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.

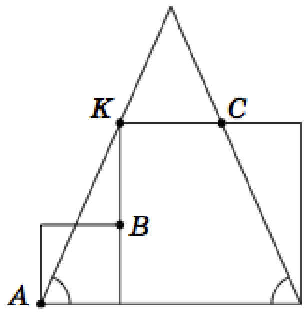


11.5.8. [Ust — 2002.7.3] Можно ли так расположить на плоскости четыре прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была одна общая вершина? (Прямоугольники могут пересекаться.)

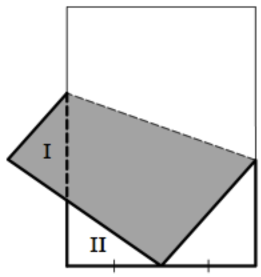
11.5.9. [Mpr — 1993.7.4] В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

11.5.10. [Mpr — 2015.7.4] Смешарики живут на берегах пруда в форме равностороннего треугольника со стороной 600 м. Крош и Бараш живут на одном берегу в 300 м друг от друга. Летом Лосяшу до Кроша идти 900 м, Барашу до Нюши — тоже 900 м. Докажите, что зимой, когда пруд замёрзнет и можно будет ходить прямо по льду, Лосяшу до Кроша снова будет идти столько же метров, сколько Барашу до Нюши.

11.5.11. [Mpr — 2018.7.4] Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина K большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

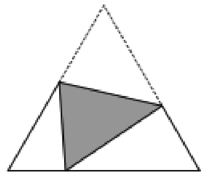


11.5.12. [Mpr — 2011.7.4] Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (см. рисунок). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



11.5.13. [Mpr — 2016.7.5] Один угол треугольника равен 60°, а лежащая против этого угла сторона равна трети периметра треугольника. Докажите, что данный треугольник равносторонний.

11.5.14. [Ust — 2015.7.5] Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рисунок). Докажите, что углы двух белых треугольников соответственно равны.



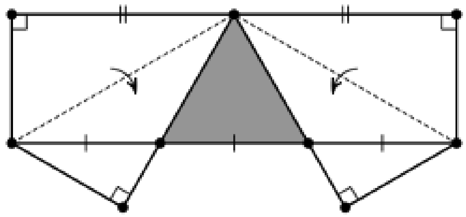
11.5.15. [Ust — 2012.7.5] В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла A пересекает отрезок CM в точке T. Оказалось, что отрезки CM и AT разбили треугольник ABC на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

11.5.16. [Ust — 2011.7.5] В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка K и проведены биссектриса KE треугольника AKC и высота KH треугольника BKC. Оказалось, что угол EKH — прямой. Найдите BC, если $HC = 5$.

11.5.17. [Ust — 2017.7.6] $KLMN$ — выпуклый четырёхугольник, в котором равны углы K и L. Серединные перпендикуляры к сторонам KN и LM пересекаются на стороне KL. Докажите, что в этом четырёхугольнике равны диагонали.

11.5.18. [Mpr — 1990.6.6;7.6] Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KMXY$. Докажите, что середины отрезков AK, BM, CX и DY также являются вершинами квадрата.

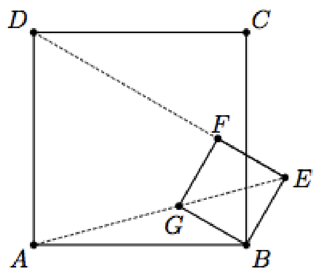
11.5.19. [Ust — 2014.7.7] Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке. Противоположная сторона при этом оказалась разделённой на три равные части. Докажите, что закрашенный треугольник — равносторонний.



11.5.20. [Ust — 2013.7.8] Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, $\angle ABC =$ $= 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены соответственно точки P и Q так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что угол PIQ — прямой.

11.5.21. [Ust — 2012.7.8] Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны CA за точку A — в точке X. Известно, что $XY = YZ$ и $AY = BZ$. Докажите, что прямые XZ и BC перпендикулярны.

11.5.22. [Ust — 2016.7.8] Квадраты $ABCD$ и $BEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки A, G и E лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки D, F и E также лежат на одной прямой.



11.5.23. [Ust — 2018.7.8] Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.

11.5.24. [Ust — 2019.7.8] Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что сумма углов ABC и APC равна $180°$ и $CP = AB$. Докажите, что $\angle CAP < 60°$.