

Логарифмические уравнения

1. (МГУ, ДВИ, 2015.4) Решите уравнение $\log_x |2x^2 - 3| = 4 \log_{|2x^2 - 3|} x$.

$$\frac{2}{2x^2 - 3} \cdot \frac{2}{x} = x$$

2. (МГУ, мехмат, 2006.1) Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

917

3. (МГУ, мехмат, 2007.1) Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя, по ошибке, не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

15

4. (МГУ, биологический ф-т, 2003) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_4 x = -1.$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x} - 1} = 2$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1.$$

1/2

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите уравнение

$$(1 - \log_2 x) \cdot \sqrt{\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x}} = 1.$$

2/3

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Решите уравнение

$$\left| \log_2 \frac{x}{2} \right|^3 + |\log_2 2x|^3 = 28.$$

4, 1/4

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите уравнение

$$\left| \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 2 \right| - \left| \log_2 x + 2 \right| = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x.$$

$\{1\} \cap \left[\frac{2}{7}; 0\right)$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Решите уравнение

$$\log_{2/9} 2 = (\log_x 2) \cdot (\log_{4x} 2) \cdot (\log_{9x} 2).$$

$\frac{2}{9+6} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}} \sqrt[2]{\frac{2}{9-6}}$

10. («Физтех», 2015) Решите уравнение

$$x^{\log_3(27x^2)} = \frac{x^9}{81}.$$

6 ' 8

11. («Физтех», 2015) Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{400}\right)^{\log_5 \frac{x}{8}} = \frac{1024}{x^3}.$$

91 ' $\frac{9}{8}$

12. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\log_{2^{x+1}+1} (3x^2 + 4x - 3) = \log_{10-2^{2-x}} (3x^2 + 4x - 3).$$

$\frac{8}{2}, 2$

13. («Физтех», 2014) Решите уравнение

$$\log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) \cdot \log_{x+1} (x^3 + 1) = \log_{7x-6} (7x^2 + x - 6) + \log_{x+1} (x^3 + 1).$$

2

14. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\log_{5x} (x^2 + 9x + 15) + \log_{125x} x^3 = \frac{2}{x}.$$

1

15. («Физтех», 2013) Решите уравнение

$$\log_{4^{x+4}} x^4 + \log_{2^{x+4}} (x+5)^2 = \frac{4}{x+4}.$$

$\frac{2}{14} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}} \sqrt[2]{\frac{2}{14}}$

16. («Физтех», 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y-1} \sqrt{x+2} = \log_{2y+1} x, \\ \log_x \frac{x^3}{2y+1} = \log_{2y-1}(x+2). \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{21\sqrt{+8}}; \frac{7}{21\sqrt{+8}} \right); \left(\frac{7}{21\sqrt{+2}}; \frac{7}{21\sqrt{+1}} \right)$$

17. («Физтех», 2009) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y+3}(4y^2 - x^2 + 16y + 6x + 8) = 2, \\ \log_{x-4}(x^2 - 6x - y + 13) = 2. \end{cases}$$

$$(87; 81)$$

18. («Физтех», 2007) Решите уравнение

$$2 \log_5(x^2 - 4) + 4 \sqrt{\log_5(x-2)^2 - \log_5(x+2)^2} = 5.$$

$$8\sqrt{+7}$$

19. («Физтех», 2018, 11) Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_{x^2}(x^2 - 10x + 21), \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-7} \quad \text{и} \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$$

равно сумме двух остальных.

$$8 = x$$

20. («Физтех», 2018, 11) Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_x \left(x - \frac{13}{6} \right), \quad \log_{x-\frac{13}{6}}(x-3) \quad \text{и} \quad \log_{x-3} x$$

равно произведению двух остальных.

$$\frac{7}{81\sqrt{+8}} = x; \frac{8}{11} = x$$

21. (МГУ, ИСАА, 2004) Решите уравнение

$$(\log_3(3^{-2x} + 1) + x) \cdot (2 \log_9(3^{2x} + 1) - x - 2) = 3.$$

$$\log_3 \frac{27 \pm 5\sqrt{29}}{2}$$

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите уравнение

$$\log_3(x+1) \cdot \log_3(2x-1) \cdot (3 - \log_3(2x^2 + x - 1)) = 1.$$

$$2$$

23. («Ломоносов», 2018, 10–11) Найдите все такие наборы чисел x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , что $x_1 = x_{n+1}$ и при всех $k = 1, \dots, n$ выполнено равенство

$$2 \log_2 x_k \cdot \log_2 x_{k+1} - \log_2^2 x_k = 9.$$

$$\frac{8}{1} = 1 + 7x = \dots = 7x = 1x \text{ или } 8 = 1 + 7x = \dots = 7x = 1x$$

24. (МГУ, мехмат, 2001-05.2) При каких значениях x числа

$$\log_2 (2x^2 + 4x), \quad \log_2 (8 - x^2 - 19x), \quad \log_2 \left(x^2 - 15x + 7\frac{1}{2} \right)$$

являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

8-

25. (МГУ, мехмат, 2000-07.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

(7; 8/5)

26. («Физтех», 2020, 11) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{1-2\sqrt{2}}; \frac{7}{2\sqrt{2}-6} \right); (8; 6); (7; 7)$$