Логарифмические преобразования и вычисления

1. (*МГУ, ДВИ, 2012.2*) Вычислите $\log_2 \log_{81} \frac{417}{139}$.

$\boxed{-2}$

2. (*МГУ, ДВИ, 2013.2*) Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$.

$\boxed{\frac{1}{2}}$

3. (*МГУ, централизованный экзамен, 2008*) Вычислите $\log_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \log_2(1 - \cos\alpha) - 2\log_2 \sin\alpha$, где $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

$\boxed{\frac{1}{2}}$

4. (*МГУ, мехмат, 1994.1*) Число x удовлетворяет условиям $\operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4}$ и $\sin 2x > 0$. Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$ и чему оно тогда равно?

Обязательно определено и равно -2

5. (*МГУ, экономич. ф-т, 1992*) Вычислить $\log_{\frac{9}{5}} \left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right| + \log_{\frac{9}{5}} \left|\cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right|$, если известно, что $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\boxed{-1}$

6. (*ОММО, 2018*) Докажите неравенство

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \ldots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

7. (*МГУ, ВМК, 1984*) Известно, что $\log_a b = 7$. Найдите $\log_{\frac{a}{b}} (a^3 b)$.

$\boxed{-\frac{5}{3}}$

8. (*МГУ, филологич. ф-т, 1988*) Вычислите:

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5}.$$

$\boxed{2}$

9. (*МГУ, экономич. ф-т, 1989*) Вычислите:

$$\frac{\log_2 70}{\log_{280} 2} - \frac{\log_2 560}{\log_{35} 2}.$$

$\boxed{3}$

10. (*МГУ, биологич. ф-т, 1998*) Известно, что $\log_a b = \sqrt{5}$. Найдите

$$\log_{a^4 \sqrt[5]{b^6}} \frac{b\sqrt[3]{b}}{\sqrt[5]{a}}\,.$$

$\boxed{\frac{20\sqrt{5}-3}{18\sqrt{5}+60}}$

11. (*МГУ, физический ф-т, 1982*) Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Найдите

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\,.$$

$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

12. (*МФТИ, 1996*) Выразить $\log_{300} 120$ через a и b, где $a = \log_2 3$ и $b = \log_3 5$.

$\boxed{\frac{3+a+ab}{2+a+2ab}}$

13. (*МФТИ, 1996*) Выразить $\log_{600} 900$ через a и b, где $a = \log_5 2$ и $b = \log_2 3$.

$\boxed{\frac{2(1+a+ab)}{2+3a+ab}}$

14. (*МФТИ, 1996*) Выразить $\log_{140} 350$ через a и b, где $a = \log_7 5$ и $b = \log_5 2$.

$\boxed{\frac{1+2a+ab}{1+a+2ab}}$

15. (*МГУ, геологич. ф-т, 1989*) Сравните $2\log_2 5$ и $3\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{24}$.

Первое число больше

16. (*МГУ, мехмат, 1999-03.3*) Известно, что для некоторой тройки чисел x, y, z $(x \neq y)$ выражения

$$\log_{(x^5y^2z)} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{z}\right) \quad \text{и} \quad \log_{(x^2y^5z)} \left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$$

равны одному и тому же числу. Найти это число.

$\boxed{\frac{1}{18}}$

17. (*«Ломоносов», 2017*) Выясните, какое из чисел больше: $11^{\lg 121}$ или $10 \cdot 10^{\lg^2 11} + 11$.

Первое

18. (*«Ломоносов», 2008*) Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 2 от числа 16^{64} (первый раз логарифм берётся от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?

Шесть раз

19. (*«Ломоносов», 2006*) Вычислите

$$\log_2 \log_8 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{64}}}}_{39}$$

$\boxed{-38}$

20. (*«Ломоносов», 2007*) Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{21}b_{50}} b_1 b_2 \ldots b_{70},$$

где b_1, b_2, …— геометрическая прогрессия?

$\boxed{35}$

21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2012} 2013 \quad \text{или} \quad \log_{2013} 2014.$$

$\boxed{\text{Первое}}$

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2013}{2\lg 2} \quad \text{или} \quad 2\lg\frac{2013}{2}\,.$$

$\boxed{\text{Второе}}$

23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013*) Найдите все значения x, при каждом из которых выражения

$$\log_{2013}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}+\operatorname{tg} x\right) \quad \text{и} \quad \log_{2012}\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}-\operatorname{tg} x\right)$$

равны друг другу.

$\boxed{x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 3 от этих чисел равна 10. Найдите эти числа, если $\log_3 b_1 \cdot \log_3 b_5 = 3$.

$\boxed{3,\ 3\sqrt{3},\ 9,\ 9\sqrt{3},\ 27}$

25. (*ММО, 2018, 11.1*) Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)\,x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)\,x^2 + 1.$$

26. (*ММО, 2015, 11.1*) Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

$\boxed{\text{Да}}$

27. (*Открытая олимпиада ИТМО, 2015, 11*) Известно, что

$$\left(\log_x^2 y + \log_z^2 t\right)\left(\log_y^2 z + \log_t^2 x\right) = 37 \quad \text{и} \quad \log_y t + \log_t y = 5.$$

Найдите $\log_x z + \log_z x$.

$\boxed{\pm 4}$