Прямые и плоскости

1. (*«Физтех», 2023, 11*) На рёбрах BC, AB и A_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки K, L и M соответственно так, что $BC : BK = AL : LB = B_1M : MA_1 = 2$. Прямая ℓ пересекает прямые CD, C_1K, B_1D_1 и LM в четырёх различных точках E, F, G и H соответственно. Найдите длину отрезка HE, если известно, что $GE = 3$.

$\boxed{5}$

2. (*МФТИ, 2002.4*) Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 8, высота SO равна 3. Точка M — середина ребра SB, точка K — середина ребра BC. Найти:

1. объем пирамиды $AMSK$;
2. угол между прямыми AM и SK;
3. расстояние между прямыми AM и SK.

$\boxed{1)\ 8;\ 2)\ \arccos\frac{3}{5};\ 3)\ \frac{24}{13}}$

3. (*«Физтех», 2009.4*) На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX : XB = 4$. Точки K и L — проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC = 3$, $KD = 7$, $KA = 13$, $LC = 9$, $LB = \frac{7}{2}$. Найдите длину отрезка LD, высоту пирамиды, опущенную из вершины A, и угол между ребром AB и плоскостью BCD.

$\boxed{11;\ 5\sqrt{3};\ \arcsin\sqrt{\frac{12}{61}}}$

4. (*МФТИ, 1997.5*) В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AC и BD взаимно перпендикулярны, $AB = BD = AD = a$, середина ребра AC равноудалена от плоскостей ABD и BCD, угол между ребром AC и гранью CBD равен $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найти длину ребра CD, угол CAD и угол между ребром BD и гранью ACD.

$\boxed{a,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}}$

5. (*МФТИ, 1996.5*) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $DK = 2KC$. Найти:
1) расстояние от точки N до прямой AK;
2) расстояние между прямыми MN и AK;
3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MNK.

$\boxed{6\sqrt{\frac{17}{13}};\ \frac{18}{\sqrt{53}};\ \frac{66}{\sqrt{173}}}$

6. (*МФТИ, 2000.6*) В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, $\angle ADB = 2\,\mathrm{arctg}(3/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти:

1. объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;
2. площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC.

$\boxed{1)\ \frac{84\sqrt{39}}{55};\ 2)\ \frac{1632\sqrt{3}}{275}}$

7. (*«Курчатов», 2015, 11.6*) Пусть A и B — различные точки, принадлежащие линии пересечения перпендикулярных плоскостей π_1 и π_2. Точка C принадлежит плоскости π_2, но не принадлежит π_1. Обозначим через P точку пересечения биссектрисы угла ACB с прямой AB и через ω окружность с диаметром AB в плоскости π_1. Плоскость π_3, содержащая CP, пересекает окружность ω в точках D и E. Докажите, что CP — биссектриса угла DCE.

8. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2011, 10–11*) Прямая a пересекает плоскость α. Известно, что в этой плоскости найдутся 2011 прямых, равноудалённых от a и не пересекающих a. Верно ли, что a перпендикулярна α?

9. (*Всеросс., 1999, округ, 10*) В пространстве даны n точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой, никакие четыре не лежат в одной плоскости). Через каждые три из них проведена плоскость. Докажите, что какие бы $n-3$ точки в пространстве ни взять, найдётся плоскость из проведённых, не содержащая ни одной из этих $n-3$ точек.

10. (*Всеросс., 2011, финал, 11*) По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

11. (*Всеросс. по геометрии, 2010, 10*) Дана прямая ℓ в пространстве и точка A, не лежащая на ней. Для каждой прямой ℓ', проходящей через A, построим общий перпендикуляр XY (Y лежит на ℓ') к прямым ℓ и ℓ'. Найдите геометрическое точек Y.

12. (*Турнир городов, 2000, 10–11*) В пространстве проведено n плоскостей. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все n, при которых это возможно.

$\boxed{\text{2000 или 3998}}$

13. (*ММО, 2004, 11*) Верно ли, что для любых четырёх попарно скрещивающихся прямых можно так выбрать по одной точке на каждой из них, чтобы эти точки были вершинами а) трапеции; б) параллелограмма?

14. (*ММО, 2012, 11*) На плоской горизонтальной площадке стоят пять прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые четыре из этих прожекторов можно повернуть так, что все четыре испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все пять прожекторов, чтобы все пять лучей пересеклись в одной точке?