Лемма о трезубце

Вспомогательная задача. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, I_A — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC.

1) Докажите, что точки B, C, I, I_A лежат на одной окружности ω.

2) Докажите, что центр P окружности ω является серединой отрезка II_A и расположен на описанной окружности треугольника ABC.

Из этой задачи непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма о трезубце. Точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с его описанной окружностью равноудалена от точек B, C, I, I_A.

Лемма о трезубце называется также *теоремой о трилистнике.*

Задача 1. (*Внешняя лемма о трезубце*) Точка пересечения биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC с его описанной окружностью равноудалена от точек B, C, I_B, I_C. Докажите.

Задача 2. (*«Ломоносов», 2012, 10–11.5*) Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол B, если $OD = 4AC$.

$\boxed{2\arccos\frac{1}{8} = \arccos\left(-\frac{31}{32}\right)}$

Задача 3. Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r соответственно.

1) Точка I — центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A'. Докажите, что $IA \cdot IA' = 2Rr$.

2) Докажите *формулу Эйлера*:

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где d — расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

Задача 4. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9.4*) Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B.

Задача 5. (*Всеросс., 2012, ЗЭ, 9.6*) Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 6. (*Всеросс., 2012, ЗЭ, 11.6*) Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача 7. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 10.4, 11.4*) Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q.

Задача 8. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 10–11.6*) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ω ($AD \parallel BC$). Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности ω, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω.