

## Комбинаторика на клетчатой бумаге

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.5, 7–8.6, 9.4) На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (катеты идут по линиям сетки). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество треугольников можно найти на этом рисунке?

82

2. («Ломоносов», 2019, 5–6.4) Каждую клетку таблицы  $3 \times 3$  раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет, причём обязательно все три цвета использованы. Сколько существует таких раскрасок?

942

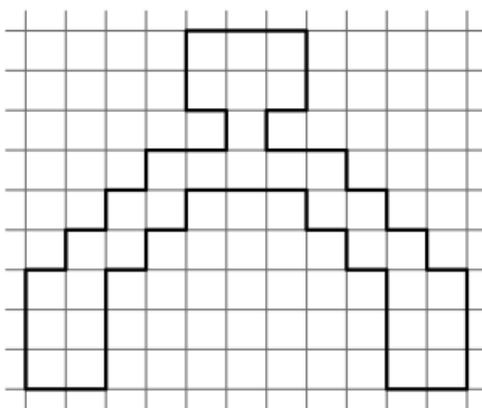
3. («Ломоносов», 2019, 7–8.4, 9.5) Каждую клетку таблицы  $3 \times 3$  раскрашивают в один из трёх цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, имеют разный цвет. Среди всех возможных таких раскрасок найдите долю тех, в которых использовано ровно два цвета.

 $\frac{17}{1}$ 

4. («Физтех», 2012, 9–11) Прямоугольник, составленный из одинаковых квадратных клеток, назовём *чётным*, если он содержит чётное число клеток. Из одинаковых квадратных клеток составлен прямоугольник длиной 9 клеток и шириной 4 клетки. Сколько в нём содержится чётных прямоугольников?

00E

5. (Всеросс., 2019, ШЭ, 11.3) Сколькими способами можно разрезать по клеткам приведенную ниже картинку на прямоугольники  $1 \times 2$  (сторона каждой клетки равна 1)?



27

6. («Физтех», 2011, 9–11) Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких, что точка  $(14; 22)$  содержится внутри (но не на границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты — натуральными и меньше, чем 31.

30576

7. («Физтех», 2017, 9, 11) На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке  $(60, 45)$ . Найдите количество таких квадратов.

2070

8. («Физтех», 2012, 11) На клетчатой доске размера  $31 \times 19$  (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 5 и 7 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

2692

9. («Высшая проба», 2014, 9.5) Клетки шахматной доски раскрашиваются в три цвета — белый, серый и чёрный — таким образом, чтобы соседние клетки, имеющие общую сторону, отличались цветом, однако резкая смена цвета (то есть соседство белой и чёрной клеток) запрещена. Найдите число таких раскрасок шахматной доски (раскраски, совпадающие при повороте доски на 90 и 180 градусов, считаются разными).

238

## Две доминошки на клетчатой доске

Рассмотрим несколько задач о размещении пары доминошек на клетчатой доске — по мотивам отборочного этапа олимпиады «Физтех» 2023 года.

10. («Физтех», 2023, 8) Сколькими способами в прямоугольнике  $3 \times 30$  можно разместить одну кость домино  $1 \times 2$  и одну кость тримино  $1 \times 3$  так, чтобы кость  $1 \times 3$  находилась параллельно короткой стороне прямоугольника?

*Замечание.* Первая кость занимает две соседние клетки, а вторая — три подряд идущие клетки.

4176

11. Давайте обобщим предыдущую задачу. Сколькими способами в прямоугольнике  $3 \times n$  можно разместить доминошку и триминошку так, чтобы триминошка находилась параллельно короткой стороне прямоугольника?

$5n^2 - 11n + 6$

12. («Физтех», 2023, 9) Сколькими способами в полосе  $2 \times 30$  можно разместить две кости домино  $1 \times 2$ ?

3656 или 7312 — принимались оба ответа

13. Обобщаем предыдущую задачу. Сколькими способами в полосе  $2 \times n$  можно разместить две различные доминошки (красную и синюю)?

$$9n^2 + 27n + 22$$

14. («Физтех», 2023, 10) Сколькими способами в прямоугольнике  $5 \times 15$  можно разместить две кости домино  $1 \times 2$ , каждая из которых покрашена в два цвета — чёрный и белый?

*Замечание.* Каждая кость занимает две соседние клетки: на одной — чёрная часть кости, а на другой — белая.

$$32204 \text{ или } 64408 \text{ — принимаются оба ответа}$$

15. Сколькими способами в прямоугольнике  $5 \times n$  можно разместить две различные доминошки (красную и синюю)?

$$81n^2 + 147n + 82$$

16. («Физтех», 2023, 11) Сколькими способами в прямоугольнике  $60 \times 70$  можно разместить две кости домино  $1 \times 2$ ?

$$34167891 \text{ или } 68335782 \text{ — принимаются оба ответа}$$

17. (Почувствуйте себя составителем нескольких параллельных олимпиадных вариантов) Сколькими способами в прямоугольнике  $m \times n$  можно разместить две различные доминошки (красную и синюю)?

$$(2mn - m - n)^2 - 14mn + 13(m + n) - 8$$