Геометрическая комбинаторика

1. (*«Ломоносов», 2016, 5–8*) В правильном 7-угольнике $ABCDEFG$ провели диагонали AC, AF, BD, BG, CF, DF и DG.

а) Раскрасьте вершины 7-угольника в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы любые две вершины, соединённые отрезком, были раскрашены в разные цвета.

б) Найдите количество вариантов такой раскраски.

б) 6

2. (*Математический праздник, 1998, 6.1, 7.1*) На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

432

3. На прямой отметили 10 различных точек. Сколько при этом получилось отрезков?

45

4. На окружности отметили 12 различных точек. Сколько при этом получилось дуг?

132

5. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

$\frac{n(n-3)}{2}$

6. (*«Ломоносов», 2017, 7–8.5, 9.3*) Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?

240

7. На плоскости проведены 10 прямых так, что никакие две прямые не параллельны и никакие три прямые не пересекаются в одной точке.

а) Найдите число точек пересечения этих прямых.

б) Сколько треугольников образовано этими прямыми?

а) 45; б) 120

8. (*«Физтех», 2017, 9–10*) Найдите количество пар целых чисел (a, b) таких, что $1 \leqslant a \leqslant 70$, $1 \leqslant b \leqslant 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

1260

9. (*«Физтех», 2018, 9*) На каждой из прямых $y = 3$ и $y = 4$ отмечено по 73 точки с абсциссами $1, 2, 3, \ldots, 73$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 146 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

10654

10. (*«Физтех», 2018, 10*) На каждой из прямых $x = 0$ и $x = 2$ отмечено по 62 точки с ординатами $1, 2, 3, \ldots, 62$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 124 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

7908

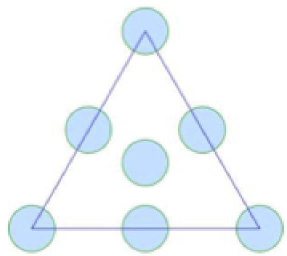
11. (*«Физтех», 2018, 11*) На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 12$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1, 2, 3, \ldots, 200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

80268

12. (*«Ломоносов», 2016, 9–11*) Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2 см, на каждой отмечено по 10 точек, идущих через 1 см. Нужно из этих 20 точек выбрать 9 таких точек, чтобы расстояние между любыми двумя из них было не менее 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

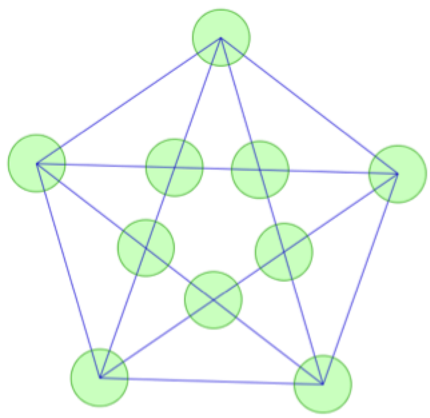
420

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–6.7, 7–8.7, 9.5*) Поле для игры «7 кругов» представляет собой правильный треугольник и 7 одинаковых кружочков с центрами в вершинах, серединах сторон и центре треугольника. Сколько существует различных способов расставить черные и белые фишки, по одной в каждый кружок? Расстановки, которые переходят друг в друга при повороте, считаются одинаковыми.



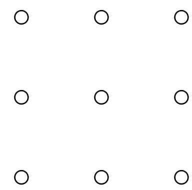
48

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 5–6.7, 7–8.7, 9.5*) Поле для игры «10 кругов» представляет собой правильный пятиугольник и 10 одинаковых кружочков с центрами в вершинах и точках пересечения диагоналей пятиугольника. Сколько существует различных способов расставить черные и белые фишки, по одной в каждый кружок? Расстановки, которые переходят друг в друга при повороте вокруг центра пятиугольника, считаются одинаковыми.



208

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*) На плоскости расположены 9 точек в виде решётки 3×3, как показано на рисунке.



а) Через все возможные пары точек провели прямые. Сколько различных прямых получилось?

б) Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

а) 20; б) 76

16. (*«Физтех», 2017, 10*) На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 — на стороне AB, 11 — на стороне BC, 12 — на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4951

17. (*«Высшая проба», 2016, 9.5*) На сколько частей могут делить плоскость 7 различных касательных к данной окружности? Приведите примеры для всех ответов и докажите, что других не существует.

26, 27, 28, 29

18. (*«Физтех», 2014, 9–10*) На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — 19 параллельных между собой прямых, в другом — 23 параллельных между собой прямых, в третьем — 36 параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг?

2028

19. (*«Ломоносов», 2014, 8.5, 9.3*) Дан правильный 27-угольник $A_1A_2\ldots A_{27}$. Найдите количество неравнобедренных треугольников с вершинами в точках A_1, A_2, $\ldots$, A_{27}. Треугольники, отличающиеся порядком вершин (например, $A_1A_2A_4$ и $A_2A_4A_1$), считаются за один треугольник.

2592

20. (*«Физтех», 2015, 10*) Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

364

21. (*«Физтех», 2015, 10*) Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами трапеций.

720

22. (*«Физтех», 2013*) Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

384

23. (*«Физтех», 2013*) Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

765

24. (*Всеросс., 2014, МЭ, 11.6*) На окружности отмечено 20 точек. Сколько существует таких троек хорд с концами в этих точках, что каждая хорда пересекает каждую (возможно, в концах)?

156180

25. (*«Физтех», 2014, 11*) В выпуклом 17-угольнике проводят все его диагонали. На какое наибольшее число частей они могут его разбить?

2500

26. (*«Физтех», 2016, 9–11*) На плоскости проведены 3 семейства по 7 прямых трёх разных направлений, причём прямые различных направлений пересекаются. Какое наибольшее количество ограниченных областей вырезают они из плоскости?

127

27. (*«Физтех», 2014, 9–10*) Дан выпуклый 15-угольник, никакие три диагонали которого не имеют общих точек, отличных от вершин. Найдите число точек пересечения диагоналей (не считая вершин).

1365

28. (*«Физтех», 2014, 9, 11*) Отметили все вершины правильного 12-угольника. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся семизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках?

126720

29. (*«Ломоносов», 2013, 9.8*) Сколькими различными способами можно выбрать целые числа $a, b, c \in [1; 100]$ так, чтобы точки с координатами $A(-1, a)$, $B(0, b)$ и $C(1, c)$ образовывали прямоугольный треугольник?

974

30. (*«Ломоносов», 2016, 10–11*) На окружности пытаются разместить 30 чёрных и 20 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с чёрными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

720

31. (*«Высшая проба», 2012, 9.6*) На плоскости отмечены восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли быть так, что более одной пятой всех выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках — параллелограммы?

Да

32. (*Всеросс., 2019, РЭ, 9.9, 10.9*) На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

$\boxed{n^2 - n}$

33. (*«Курчатов», 2017, 10.5*) Куб со стороной 5 сложен из 125 кубиков со стороной 1. Сколько маленьких кубиков пересекает плоскость, перпендикулярная одной из диагоналей куба и проходящая через её середину?

$\boxed{55}$

34. (*«Высшая проба», 2014, 10.5*) На плоскости даны восемь различных точек. Нумерацию этих точек числами от 1 до 8 назовём *хорошей*, если выполнено следующее условие:

существует такая прямая, что все точки лежат по одну сторону и на разных расстояниях от неё, и при этом расстояния от точек до этой прямой возрастают с возрастанием номера (т. е. ближайшая точка — номер 1, следующая по удалённости — номер 2 и т. д.).

Какое максимальное количество различных хороших нумераций может быть у заданной восьмёрки точек?

$\boxed{56}$

35. (*«Высшая проба», 2012, 11.6*) В одной из вершин правильного $2n$-угольника ($n \geqslant 2$) поставлено число 1. Для данной расстановки чисел $2, 3, \ldots, 2n$ в остальные вершины $2n$-угольника поставим на каждой его стороне знак $+$, если число на конце стороны (при движении по часовой стрелке) больше числа на её начале, и знак $-$, если оно меньше. Докажите, что модуль разности между числом расстановок чисел $2, 3, \ldots, 2n$ с чётным количеством плюсов на сторонах и числом расстановок с нечётным количеством плюсов равен числу расстановок, в которых плюсы и минусы чередуются, при (а) $n = 3$; (б) $n = 4$; (в) произвольном n.