Исследование функций

1. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 8.6*) На координатной плоскости есть точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $y(x+1) = x^2 - 1$. Например, одна из них — точка с координатами $(1, 0)$. Изобразите *все* точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению.

Пара прямых

2. (*Всеросс., 2019, МЭ, 8.2*) Часть графика линейной функции, расположенная во второй координатной четверти, вместе с осями координат образует треугольник. Во сколько раз изменится его площадь, если угловой коэффициент функции в два раза увеличить, а свободный член в два раза уменьшить?

Уменьшится в 8 раз

3. (*«Шаг в будущее», 2017, 8.4*) Обозначим $\min(a; c)$ наименьшее из чисел a и c. Постройте график функции

$$y = \min\left(x + 2; x^2 - 6x + 8\right),$$

и с его помощью решите неравенство $\min\left(x + 2; x^2 - 6x + 8\right) \geqslant 0$.

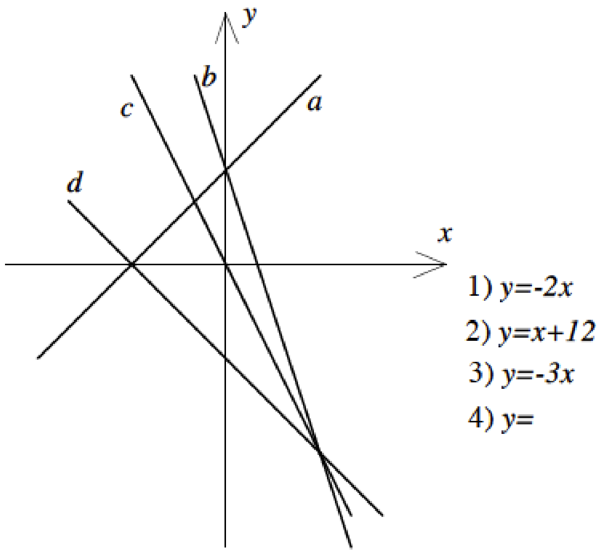
Указание. Если при каких-то значениях аргумента x значения a и c совпадают, включаем в график функции любой из них.

4. (*«Шаг в будущее», 2016, 8.5*) Построить график функции $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - |x - 3|), & -4 \leqslant x < 4, \\ x^2 - 12x + 32, & -4 < x < 6, \\ \dfrac{(3x - 24)(x - 11)}{x - 8} + 11, & 6 < x < 10, \\ \dfrac{34 - 3x}{x - 11}, & 10 < x < 11. \end{cases}$$

1. Указать область значения и область определения функции.
2. Написать уравнения всех прямых, проходящих через точку $A(-4; -4)$ и имеющих с графиком функции единственную общую точку.

5. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 9.3*) Дима начертил графики четырёх линейных функций на координатной плоскости, но забыл отметить единичные отрезки. Когда он переписывал задание в тетрадь, то отвлекся и не дописал уравнения, задающие функции под номерами 3 и 4. Найдите эти уравнения. Ответ обоснуйте.



6. (*Олимпиада им. Эйлера, ЗЭ, 2019.5*) Графики линейных функций $y = ax + c$, $y = ax + d$, $y = bx + e$, $y = bx + f$ пересекаются в вершинах квадрата P. Могут ли точки $K(a, c)$, $L(a, d)$, $M(b, e)$, $N(b, f)$ располагаться в вершинах квадрата, равного квадрату P?

7. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10.3*) Постройте график функции $y = \dfrac{x^2}{|x|}$.

8. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 11.2*) Постройте график функции $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.

9. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 10.5, 11.5*) Постройте график функции

$$y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2.$$

10. (*«Ломоносов», 2017, 9.7*) Про функцию $y = f(x)$ известно, что она определена и непрерывна на всей числовой прямой, нечётна и периодична с периодом 5, а также что $f(-1) = f(2) = -1$. Какое наименьшее число корней может иметь уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[1755; 2017]$?

11. (*«Курчатов», 2016, 10.1*) Известна сумма четвёртой и пятой степени некоторого нецелого числа. Всегда ли можно определить знак исходного числа?

12. (*Моск. матем. регата, 2015, 11*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y, \\ \sin y - \sin z = z - y, \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

$\boxed{(\pi, \pi, \pi)}$

13. (*Моск. матем. регата, 2016, 11*) Решите уравнение

$$2 \sin \frac{\pi x}{2} - 2 \cos \pi x = x^5 + 10x - 54.$$

$\boxed{2}$

14. (*ОММО, 2020.9*) Про функции $p(x)$ и $q(x)$ известно, что $p(0) = q(0) > 0$ и $p'(x)\sqrt{q'(x)} = \sqrt{2}$ для любого $x \in [0; 1]$. Докажите, что если $x \in [0; 1]$, то $p(x) + 2q(x) > 3x$.

15. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.5*) Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел, причём для любого x выполняются равенства $f(x + 2) = f(2 - x)$ и $f(x + 7) = f(7 - x)$. Докажите, что $f(x)$ — периодическая функция.

16. (*Всеросс., 1996, ЗЭ, 11.2*) Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась.