Изогональное сопряжение

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC (для неостроугольного треугольника рассуждения немного меняются, но в целом остаются аналогичными). Возьмём внутри него точку P. Пусть прямая ℓ_a симметрична прямой AP относительно биссектрисы угла BAC. Аналогично определим прямые ℓ_b и ℓ_c.

Теорема. Прямые ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c пересекаются в одной точке.

Точка Q пересечения прямых ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c называется *изогонально сопряжённой* точке P. Ясно, что и наоборот, точка P изогонально сопряжена точке Q.

Задача 1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника и его ортоцентр являются изогонально сопряжёнными точками.

Задача 2. Изогональное сопряжение для любого треугольника имеет ровно четыре неподвижные точки (которые при изогональном сопряжении переходят сами в себя). Что это за точки?

Доказательство 1. Теорема Карно

Обозначим P_a, P_b, P_c проекции точки P на стороны BC, CA, AB соответственно. (Треугольник $P_aP_bP_c$ называется *педальным треугольником* точки P относительно треугольника ABC.)

Задача 3. Покажите, что $AP_b^2 + BP_c^2 + CP_a^2 = P_aB^2 + P_bC^2 + P_cA^2$.

Задача 4. Покажите, что $\ell_a \perp P_bP_c$.

Задача 5. Докажите Теорему с помощью теоремы Карно.

Доказательство 2. Теорема Чевы

Докажем Теорему с помощью теоремы Чевы в форме синусов.

Задача 6. (*Теорема Чевы*) В треугольнике ABC точки X, Y и Z лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Докажите, что прямые AX, BY и CZ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Задача 7. (*Теорема Чевы в форме синусов*) В треугольнике ABC точки X, Y и Z лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Прямые AX, BY, CZ разбивают углы A, B, C на углы α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 соответственно (в порядке обхода по часовой стрелке). Докажите, что прямые AX, BY, CZ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1.$$

Задача 8. Докажите Теорему.

Доказательство 3. Отражения

Обозначим P_1, P_2, P_3 точки, симметричные точке P относительно сторон треугольника;

Задача 9. Пусть Q — центр описанной окружности треугольника $P_1P_2P_3$. Докажите, что $\angle PAB = \angle QAC$.

Задача 10. Докажите Теорему.

Задача 11. Докажите, что если точки P и Q изогонально сопряжены, то их проекции P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c расположены на одной окружности. Где находится центр этой окружности?

Доказательство 4. Ортоцентры

Пусть H_a, H_b, H_c — ортоцентры треугольников AP_bP_c, BP_cP_a, CP_aP_b соответственно.

Задача 12. Докажите Теорему, показав, что ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c — высоты треугольника $H_aH_bH_c$.

Доказательство 5. Вспомогательная окружность

Пусть Q — точка пересечения ℓ_a и ℓ_b. Расмотрим описанную окружность ω треугольника BQC, а также вторую точку T пересечения ℓ_a и ω.

Задача 13. Докажите Теорему, показав, что $\angle PCA = \angle BCQ$.

Доказательство 6. Вписанный шестиугольник

Начнём со вспомогательного критерия.

Задача 14. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Пусть снова Q — точка пересечения ℓ_a и ℓ_b. Рассмотрим точки A_p, B_p, C_p и A_q, B_q, C_q пересечения прямых AP, BP, CP и A_q, B_q, C_q с описанной окружностью треугольника ABC.

Задача 15. Докажите Теорему, воспользовавшись критерием предыдущей задачи.

Доказательство 7. Преобразование подобия

Рассмотрим окружность, описанную вокруг треугольника BPC. Пусть C' и B' — вторые точки пересечения этой окружности с прямыми AB и AC соответственно.

Задача 16. Докажите, что $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$.

Задача 17. Докажите Теорему, показав, что преобразование подобия, переводящее $\triangle AB'C'$ в $\triangle ABC$, переводит прямые AP, $B'P$, $C'P$ в прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c соответственно.

Доказательство 8. Педальный треугольник

Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки P на стороны B_pC_p, C_pA_p, A_pB_p треугольника $A_pB_pC_p$ соответственно (иными словами, треугольник $A_1B_1C_1$ является педальным треугольником точки P относительно треугольника $A_pB_pC_p$).

Задача 18. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Задача 19. Докажите Теорему, показав, что преобразование подобия, переводящее $\triangle A_1B_1C_1$ в $\triangle ABC$, переводит прямые A_1P, B_1P, C_1P в прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c соответственно.

Доказательство 9. Второй педальный треугольник

Рассмотрим проекции P'_a, P'_b, P'_c точки P на прямые P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b соответственно. Треугольник $P'_aP'_bP'_c$ называется *вторым педальным треугольником*. Пусть A', B', C' — вторые точки пересечения прямых PP'_a, PP'_b, PP'_c с описанной окружностью треугольника $P'_aP'_bP'_c$.

Задача 20. Докажите, что $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Задача 21. Докажите Теорему, показав, что преобразование подобия, переводящее $\triangle A'B'C'$ в $\triangle ABC$, переводит прямые $A'P$, $B'P$, $C'P$ в прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c соответственно.

Доказательство 10. Теорема Паскаля

Теорема Паскаля. Точки пересечения трёх пар сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

Задача 22. Докажите теорему Паскаля для вписанного шестиугольника $ABCDEF$. Именно, сделайте следующее:

- обозначьте $K = AB \cap DE$, $L = BC \cap EF$, $M = CD \cap FA$ (хотим доказать, таким образом, что точки K, L, M лежат на одной прямой);
- введите точки $X = AB \cap CD$, $Y = CD \cap EF$, $Z = EF \cap AB$;
- к треугольнику XYZ примените три раза теорему Менелая — для секущих BCL, EDK и FAM (каждый раз начинайте двигаться от точки X к точке Z);
- перемножьте три полученных равенства и произведите сокращения, учитывая степени точек X, Y, Z относительно окружности.

На самом деле теорема Паскаля остаётся справедливой при произвольном (не обязательно последовательном) расположении точек A, B, C, D, E, F на окружности — в любом случае точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA будут лежать на одной прямой.

Вернёмся к треугольнику ABC и точке P. Рассмотрим окружность ω, проходящую через точки B, C и пересекающую продолжения сторон BA и CA (за точку A) в точках C_1 и B_1 соответственно. Пусть BP пересекает ω в точке M, а CP пересекает ω в точке N; пусть P_1 — точка пересечения B_1M и C_1N.

Задача 23. Докажите Теорему, показав, что преобразование подобия, переводящее $\triangle AB_1C_1$ в $\triangle ABC$, переводит прямые AP_1, B_1P_1, C_1P_1 в прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c соответственно.

Доказательство 11. Трилинейные координаты

Пусть x_a, x_b, x_c — расстояния от точки P до соответствующих сторон треугольника ABC. Эти числа называются *трилинейными координатами* точки P. Будем писать $P = (x_a, x_b, x_c)$.

Задача 24. Пусть $T = (y_a, y_b, y_c)$. Докажите, что T лежит на прямой PA в том и только в том случае, если $y_b/y_c = x_b/x_c$.

Задача 25. Докажите, что не существует точки с трилинейными координатами $(\lambda x_a, \lambda x_b, \lambda x_c)$ при $\lambda \neq 1$. Иными словами, можно считать, что тройка $(\lambda x_a, \lambda x_b, \lambda x_c)$ определяет ту же самую точку P (то есть трилинейные координаты определены с точностью до пропорциональности).

Задача 26. Пусть $Q = (y_a, y_b, y_c)$. Докажите, что $Q \in \ell_a \Leftrightarrow x_b y_b = x_c y_c$.

Задача 27. Докажите Теорему.

Задача 28. Сделайте вывод, что точка Q, изогонально сопряжённая точке P, имеет трилинейные координаты $(1/x_a, 1/x_b, 1/x_c)$.

Задача 29. На сторонах AD и DC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки P и Q так, что $\angle ABP = \angle CBQ$. Отрезки AQ и CP пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle ABE = \angle CBD$.

Задача 30. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Найдите трилинейные координаты точки пересечения медиан.

Задача 31. а) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Для произвольной точки X докажите, что

$$AX^2 + BX^2 + CX^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3MX^2.$$

Сделайте вывод, что сумма квадратов расстояний от некоторой точки до вершин треугольника минимальна для точки пересечения медиан.

б) Докажите, что сумма квадратов расстояний от некоторой точки до сторон треугольника минимальна для *точки Лемуана* (изогонально сопряжённой точке пересечения медиан).

Точки Торричелли и Аполлония

Чтобы не отвлекаться на частности, мы в этом разделе будем не только считать треугольник ABC остроугольным, но и дополнительно предполагать, что он неравнобедренный и в нём нет угла 60°.

Задача 32. а) На сторонах треугольника ABC построим вовне его равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (*первая точка Торричелли*). Покажите, что стороны AB, BC и CA видны из этой точки под одинаковыми углами 120°.

б) Аналогично, на сторонах треугольника ABC построим вовнутрь его равносторонние треугольники ABC_2, BCA_2 и CAB_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (*вторая точка Торричелли*).

Задача 33. Докажите, что точки Торричелли имеют трилинейные координаты

$$\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\pm\alpha\right)}, \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\pm\beta\right)}, \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\pm\gamma\right)}\right),$$

где знак плюс берётся для первой точки Торричелли, а знак минус — для второй.

Задача 34. (*Точки Аполлония*) С треугольником ABC свяжем три окружности Аполлония, которые служат геометрическими местами точек X таких, что выполняются соответственно соотношения

$$\frac{AX}{BX} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BX}{CX} = \frac{BA}{CA}, \quad \frac{CX}{AX} = \frac{CB}{AB}.$$

Докажите, что эти три окружности имеют в точности две общие точки (которые называются *точками Аполлония*).

Задача 35. Докажите, что педальный треугольник точки Аполлония относительно треугольника ABC является равносторонним.

Задача 36. Вычислите трилинейные координаты точек Аполлония и докажите, что точки Аполлония изогонально сопряжены точкам Торричелли.

Точки Брокара

Первой точкой Брокара треугольника ABC называется такая точка P внутри него, что

$$\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA.$$

Аналогично, для *второй точки Брокара* выполнено $\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$. Если в задаче требуется доказать что-либо насчёт «точки Брокара», то это нужно сделать как для первой точки Брокара, так и для второй.

Задача 37. Через точку Брокара провели прямые, соединяющие её с вершинами треугольника ABC и пересекающие описанную около него окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Задача 38. Докажите существование точки Брокара. Для этого постройте на сторонах треугольника ABC вовне его подобные ему треугольники ABC', BCA' и CAB'. Покажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку, которая как раз и будет точкой Брокара.

Задача 39. Докажите единственность точки Брокара.

Задача 40. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке Брокара.

Задача 41. Докажите, что *первая и вторая точки Брокара P и Q изогонально сопряжены*. Именно, обозначим $\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ и $\psi = \angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$. Покажите, что

$$\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma,$$

и аналогично для угла ψ.

Задача 42. Пусть P и Q — первая и вторая точки Брокара треугольника ABC. Пусть прямые CP и BQ, AP и CQ, BP и AQ пересекаются в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точки P, Q, A_1, B_1, C_1 лежат на одной окружности.

Задача 43. Угол $\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA = \angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$ называется *углом Брокара* треугольника ABC.

а) Докажите, что угол Брокара не превосходит 30°.

б) Докажите, что угол Брокара удовлетворяет соотношению

$$\sin^3\varphi = \sin(\alpha-\varphi)\sin(\beta-\varphi)\sin(\gamma-\varphi).$$

Задача 44. Докажите, что для любой точки X, взятой внутри треугольника ABC, один из углов ABX, BCX, CAX не превосходит 30°.

Задача 45. Пусть P — точка Брокара треугольника ABC, R — радиус его описанной окружности; R_a, R_b и R_c — радиусы описанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB. Докажите, что $R^3 = R_aR_bR_c$.

Задача 46. Найдите трилинейные координаты точек Брокара.

Задача 47. На сторонах CA, AB и BC остроугольного треугольника ABC взяты точки A', B' и C' так, что $\angle AB'A' = \angle BC'B' = \angle CA'C'$. Докажите, что $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, причём центр поворотной гомотетии, переводящей один треугольник в другой, совпадает с первой точкой Брокара обоих треугольников.

Задача 48. а) Докажите, что для угла Брокара выполнено соотношение

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\,.$$

б) (*окружность Нейберга*) Пусть вершины B и C треугольника фиксированы, а вершина A движется так, что угол Брокара φ треугольника ABC остаётся постоянным. Докажите, что точка A описывает окружность. Найдите радиус этой окружности.

$\boxed{\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi - 3}}$

Задача 49. а) Докажите, что функция $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$ монотонно возрастает и выпукла вниз.

б) Для угла Брокара φ докажите неравенство $\varphi^3 \leqslant (\alpha-\varphi)(\beta-\varphi)(\gamma-\varphi)$.

в) Докажите *неравенство Йиффа*: $8\varphi^3 \leqslant \alpha\beta\gamma$.