

Интеграл. Геометрия

Данный листок посвящён применению интеграла для вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел вращения.

ЗАДАЧА 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y = x(x - 1)^2$ и осью абсцисс.

$$\frac{\pi}{1}$$

ЗАДАЧА 2. Найдите площадь симметричного параболического сегмента с основанием a и высотой h .

$$\frac{2}{3}ah$$

ЗАДАЧА 3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

$$\frac{8}{15}$$

ЗАДАЧА 4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x^3/3$.

$$\frac{1}{6}$$

ЗАДАЧА 5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x+1}$ и $y = (x+1)/3$.

$$\frac{2}{6}$$

ЗАДАЧА 6. Найдите площадь фигуры, заключённой между параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках $(0, -3)$ и $(3, 0)$.

$$\frac{1}{6}$$

ЗАДАЧА 7. Найдите меньшую из площадей фигур, на которые круг $x^2 + y^2 \leq 16$ делится параболой $y^2 = 6x$.

$$\frac{\pi}{\pi^2 + 4\sqrt{3} + 9}$$

ЗАДАЧА 8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1/(1+x^2)$ и $y = x^2/2$.

$$\frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{2}$$

ЗАДАЧА 9. Найдите площадь одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

ЗАДАЧА 10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ и осью абсцисс.

$$1 - \frac{\pi}{2}$$

ЗАДАЧА 11. Найдите площадь эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

$$\pi ab$$

ЗАДАЧА 12. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1/x^2$, $x = 1$ и осью абсцисс.

1

ЗАДАЧА 13. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линией $y = 1/(1 + x^2)$ (эта кривая называется *локоном Анъези*).

ш

ЗАДАЧА 14. Вычислите объём конуса с площадью основания S и высотой h ,

$\frac{1}{3}Sh$

ЗАДАЧА 15. Фигура, ограниченная линиями $y = \cos x$, $x = \pm\pi/2$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси абсцисс. Найдите объём полученного тела вращения.

$\frac{2}{\pi}$

ЗАДАЧА 16. Эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ вращается вокруг оси абсцисс. Найдите объём получающегося *эллипсоида вращения*. В частном случае выведите формулу объёма шара.

$\frac{4}{3}\pi a^2 b$

ЗАДАЧА 17. Фигура, ограниченная параболой $y = 1 - x^2$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси ординат. Найдите объём полученного *параболоида вращения*.

$\frac{2}{3}$

ЗАДАЧА 18. Найдите объём параболоида вращения с площадью основания S и высотой h .

$\frac{1}{3}Sh$

ЗАДАЧА 19. (*Лимон Кавальери*) Симметричный параболический сегмент с основанием $2a$ и высотой h вращается вокруг основания. Найдите объём полученного тела вращения.

$\frac{16}{91}a^2 h$

ЗАДАЧА 20. Фигура, ограниченная параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси ординат. Найдите объём полученного тела вращения.

$\frac{8}{3}$

ЗАДАЧА 21. Фигура F ограничена линиями $y = 1/x$, $x = 1$ и осью абсцисс.

а) Имеет ли фигура F конечную площадь?

б) Фигуру F вращают вокруг оси абсцисс. Имеет ли полученное тело вращения конечный объём?

а) Нет; б) да