Неравенства на олимпиаде «Туймаада»

Международная олимпиада «Туймаада» проводится в Республике Саха (Якутия) ежегодно с 1994 года. Начиная с 1997 года авторами задач «Туймаады» являются в основном члены жюри Всероссийской и Санкт-Петербургской олимпиад школьников по математике, что позволяет расценивать материалы «Туймаады» как важный ресурс для подготовки к олимпиадам высокого уровня.

С 2000 года олимпиада проводится в двух лигах: старшей (S) и младшей (J). В старшей лиге могут состязаться все школьники, в младшей — окончившие не более 9 классов.

Олимпиада проводится в два дня. И в первый, и во второй день школьники решают по четыре задачи в течение пяти часов. Задачи первого дня имеют номера с 1 по 4, задачи второго дня — с 5 по 8. Сложность задачи в варианте каждого дня, как правило, возрастает с увеличением её номера.

Вот что говорят члены жюри по поводу сложности предлагаемых задач: «В олимпиаде принимают участие школьники с весьма различным уровнем подготовки и олимпиадного опыта, поэтому и разброс сложности задач весьма велик. Как правило, первая задача варианта может быть предложена на районной олимпиаде в Петербурге; с другой стороны, на последней позиции в старшем классе не раз оказывались задачи, забракованные жюри Международной олимпиады как чрезмерно сложные. Впрочем, раз в несколько лет какому-нибудь участнику удаётся решить восьмую задачу. . . »[2].

Данный листок содержит задачи на доказательство неравенств, предлагавшиеся на олимпиаде «Туймаада» в 1997—2014 годах.

1. [Tuy — 1997.5] Докажите неравенство

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{q^n}\right)<\frac{q-1}{q-2},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $q > 2$.

(*Е. Софронов*)

2. [Tuy — 1999.4] Докажите неравенство

$$\frac{x}{y^2-z}+\frac{y}{z^2-x}+\frac{z}{x^2-y}>1,$$

где $2 < x, y, z < 4$.

(*А. Голованов*)

3. [Tuy — 2000.S.4] Для вещественных чисел x_1, x_2, …, x_n докажите неравенство

$$\left(\frac{n}{x_1+\ldots+x_n}-1\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{x_1}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{x_n}-1\right),$$

где $0 < x_k \leqslant \frac{1}{2}$, $k = 1, \ldots, n$.

(*А. Храбров*)

4. [Tuy — 2000.J.4] Докажите, что если произведение положительных чисел a, b и c равно единице, то

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(*Фольклор*)

5. [Tuy — 2002.S.2] Произведение положительных чисел a, b, c и d равно 1. Докажите, что

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d} \geqslant 4.$$

(*А. Храбров*)

6. [Tuy — 2002.J.5] Докажите, что при всех $x, y \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$5\left(x^2+y^2\right)^2 \leqslant 4+(x+y)^4.$$

(*Из материалов олимпиад*)

7. [Tuy — 2003.S.5] Докажите, что для любых α_1, α_2, …, α_n, принадлежащих интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha_1}+\frac{1}{\sin\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\sin\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha_1}+\frac{1}{\cos\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\cos\alpha_n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha_1}+\frac{1}{\sin 2\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\sin 2\alpha_n}\right)^2.$$

(*А. Храбров*)

8. [Tuy — 2003.J.5] Докажите, что для любых вещественных x и y выполняется неравенство

$$x^2\sqrt{1+2y^2}+y^2\sqrt{1+2x^2} \geqslant xy\left(x+y+\sqrt{2}\right).$$

(*А. Храбров*)

9. [Tuy — 2005.S.8] Для любых положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $a^2+b^2+c^2=1$, докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ca}+\frac{c}{c^3+ab}>3.$$

(А. Храбров)

10. [Tuy — 2006.J.4] Сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x^2+y+z}+\frac{1}{x+y^2+z}+\frac{1}{x+y+z^2}\leqslant 1.$$

(V. Cirtoaje)

11. [Tuy — 2012.S.7] Положительные числа a, b, c таковы, что $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{2a^2+b^2+3}+\frac{1}{2b^2+c^2+3}+\frac{1}{2c^2+a^2+3}\leqslant\frac{1}{2}\,.$$

(В. Аксёнов)

12. [Tuy — 2013.J.3] Для любых положительных чисел a и b докажите неравенство

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\,.$$

(А. Храбров)

13. [Tuy — 2013.S.4] Докажите, что для любых положительных x, y, z, для которых $xyz=1$, выполнено неравенство

$$\frac{x^3}{x^2+y}+\frac{y^3}{y^2+z}+\frac{z^3}{z^2+x}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

(А. Голованов)

14. [Tuy — 2014.J.4;S.3] Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+1}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

(Н. Александров)

Список литературы

[1] С. В. Попов, А. С. Голованов и др. Задачи по математике. Международная олимпиада «Туймаада». 1994—2012. М.: МЦНМО, 2013.

[2] А. Голованов, М. Иванов, К. Кохась. Международная олимпиада «Туймаада–2013». В кн.: «Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2014 года». М.: МЦНМО, 2015.

[3] А. Голованов, М. Иванов, К. Кохась. Международная олимпиада «Туймаада–2014». В кн.: «Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2015 года». М.: МЦНМО, 2016.