Необходимые и достаточные условия

Необходимые и достаточные условия фигурируют в математических рассуждениях очень часто, и данную терминологию вам нужно усвоить раз и навсегда уже сейчас. Для этого имеются как минимум три причины.

Во-первых, с необходимыми и достаточными условиями вы постоянно встречаетесь в геометрии (но, возможно, не знаете, что они так называются). А именно, необходимое условие есть *свойство*, а достаточное условие есть *признак*. Свойство параллелограмма, признак параллелограмма... вспоминаете?

Во-вторых, с понятиями необходимости и достаточности приходится часто оперировать в сложных задачах с параметрами. Кстати, из всей школьной математики данная тема — задачи с параметрами — по уровню и логической насыщенности рассуждений максимально приближена к высшей математике. Поэтому если сейчас, в школе, вы успеете выработать привычку к математическим рассуждениям, то вузовский курс математики пойдёт у вас гораздо легче.

Это как раз и есть третья причина — подготовленность к восприятию курса высшей математики (в первую очередь — математического анализа). Необходимые и достаточные условия там присутствуют на каждом шагу. На лекции по матанализу вы то и дело будете слышать нечто вроде: «Необходимость доказана, теперь докажем достаточность». И если вы не знаете этих терминов, то нить рассуждений лектора потеряете очень быстро. Надо ли объяснять, какой клубок проблем вы в результате получите к первой же сессии?

Поэтому давайте разбираться с необходимыми и достаточными условиями и повышать тем самым свою математическую культуру.

Пусть у нас имеются два высказывания, которые мы обозначим A и B. Например:

$$A := \textit{четырёхугольник является квадратом.}$$
$$B := \textit{четырёхугольник является ромбом.}$$

Из двух высказываний A и B мы можем образовать новое высказывание, которое читается так: «если A, то B». Оно называется *импликацией* и обозначается $A \Rightarrow B$. В нашем примере импликация выглядит следующим образом:

$$A \Rightarrow B := \textit{если четырёхугольник является квадратом, то он является ромбом.} \tag{1}$$

Это утверждение верно (логик скажет — истинно). Действительно, квадрат есть частный случай ромба.

Мы можем образовать и обратную импликацию:

$$B \Rightarrow A := \textit{если четырёхугольник является ромбом, то он является квадратом.}$$

Это утверждение неверно (логик скажет — ложно). Конечно же, произвольный ромб вовсе не обязан являться квадратом.

Определение. Пусть импликация $A \Rightarrow B$ верна. Тогда B называется *необходимым* условием для A; в то же время A называется *достаточным* условием для B.

Давайте взглянем ещё раз на верную импликацию (1). В соответствии с определением мы видим, что «быть ромбом» — это необходимое условие для «быть квадратом»; для того, чтобы четырёхугольник являлся квадратом, *необходимо*, чтобы он являлся ромбом. Попросту говоря, если четырёхугольник — квадрат, то условие «быть ромбом» *не обойти*: будучи квадратом, четырёхугольник обязан быть ромбом. (Куда он денется, наш квадрат? — не быть ромбом он не может.)

В то же время «быть квадратом» — это достаточное условие для «быть ромбом»; для того, чтобы четырёхугольник являлся ромбом, *достаточно*, чтобы он являлся квадратом. Если четырёхугольник — квадрат, то он и подавно ромб.

В привычной вам терминологии школьной геометрии необходимое условие называется свойством, а достаточное условие — признаком. Так, «быть ромбом» — это свойство квадрата (квадрат, помимо всего прочего, является ромбом). Наоборот, «быть квадратом» — это признак ромба (если четырёхугольник — квадрат, то он — ромб; тут акцент на том, что мы опознаём ромб).

В математическом тексте для выражения необходимого условия используются также обороты: *только тогда*; *только если*; *только в том случае, если*. Например:

Четырёхугольник является квадратом *только тогда*, когда он является ромбом.

Четырёхугольник является квадратом, *только если* он является ромбом.

Четырёхугольник является квадратом *только в том случае, если* он является ромбом.

Для выражения достаточного условия используются обороты: *тогда*; *если*; *в том случае, если*. В нашем примере:

Четырёхугольник является ромбом *тогда*, когда он является квадратом.

Четырёхугольник является ромбом, *если* он является квадратом.

Четырёхугольник является ромбом *в том случае, если* он является квадратом.

«Быть ромбом» является необходимым, но не достаточным условием для «быть квадратом» (это свойство, но не признак квадрата). Квадрат с необходимостью является ромбом, но обратное неверно: не всякий ромб — квадрат.

«Быть квадратом» является достаточным, но не необходимым условием для «быть ромбом» (это признак, но не свойство ромба). Квадрат — заведомо ромб; однако из того, что четырёхугольник — ромб, не следует с необходимостью, что он — квадрат (нужно ещё, чтобы углы были прямые).

Некоторые математические утверждения имеют вид необходимых и достаточных условий одновременно. Наш пример с квадратом и ромбом тут не годится, поэтому «сменим пластинку».

Возьмём теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Сформулируем её немного по-другому.

Теорема Пифагора. Если треугольник является прямоугольным, то сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны.

Обратите внимание: мы придали теореме форму импликации $A \Rightarrow B$, где

$A :=$ *треугольник является прямоугольным*,

$B :=$ *сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны*.

Теперь мы уже владеем терминологией и можем сформулировать теорему Пифагора так: для того, чтобы треугольник являлся прямоугольным, *необходимо*, чтобы сумма квадратов двух его сторон равнялась квадрату третьей стороны.

Здесь замечательно то, что обратная импликация $B \Rightarrow A$ также верна!

Обратная теорема Пифагора. Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник является прямоугольным.

Иными словами, обратную теорему Пифагора можно сформулировать так: для того, чтобы треугольник был прямоугольным, *достаточно*, чтобы сумма квадратов двух его сторон равнялась квадрату третьей стороны.

Когда истинны обе импликации $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, мы называем высказывания A и B *равносильными* или *эквивалентными*. В таком случае верно утверждение $A \Leftrightarrow B$, то есть оба высказывания A и B следуют друг из друга.

Эквивалентность высказываний описывается выражениями: *необходимо и достаточно*; *тогда и только тогда*; *если и только если*; *в том и только в том случае, если*[1]. Например, прямую и обратную теорему Пифагора можно объединить в одно утверждение следующими способами:

— Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, *необходимо и достаточно*, чтобы сумма квадратов двух его сторон равнялась квадрату третьей стороны.

— Треугольник является прямоугольным *тогда и только тогда, когда* сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны.

— Треугольник является прямоугольным, *если и только если* сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны.

— Треугольник является прямоугольным *в том и только в том случае, если* сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей стороны.

Математик скажет также, что условие «сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны» *характеризует* (или *описывает*) прямоугольный треугольник. Именно, любой прямоугольный треугольник этому условию удовлетворяет и никакой непрямоугольный треугольник этому условию не удовлетворяет.

Необходимое и достаточное условие называется также *критерием*. Таким образом, критерий фактически состоит из двух утверждений, одно из которых является необходимым условием, а другое — достаточным[2].

Задачи

1. Даны высказывания A и B. В каждом случае выясните, каким условием является B для A: необходимым, но не достаточным (Н); достаточным, но не необходимым (Д); необходимым и достаточным (НД).

а) $A :=$ *треугольник равносторонний*, $B :=$ *треугольник равнобедренный*;

б) $A :=$ *четырёхугольник является параллелограммом*,
$B :=$ *четырёхугольник является прямоугольником*;

в) $A :=$ *точка равноудалена от концов отрезка*,
$B :=$ *точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку*;

г) $A :=$ *диагонали четырёхугольника равны и перпендикулярны*,
$B :=$ *четырёхугольник — квадрат*;

д) $A :=$ *вокруг четырёхугольника можно описать окружность*,
$B :=$ *сумма противоположных углов четырёхугольника равна* $180°$;

е) $A :=$ *в четырёхугольник можно вписать окружность*,
$B :=$ *суммы противоположных сторон четырёхугольника равны друг другу*;

ж) $A := x > 2$, $B := x > 1$;

[1] В английском языке (и без того лаконичном) соответствующее выражение *if and only if* сокращается до забавного *iff*. Именно так и называется данный файл ;-)

[2] В школьной математике пользоваться термином «критерий» не принято, но уже на первом курсе вы с ним столкнётесь. Первое, что вас поджидает — критерий Коши сходимости последовательности. Не забудьте на коллоквиуме/зачёте/экзамене, что доказательство критерия состоит из доказательства двух утверждений — необходимости и достаточности!

з) $A :=$ *число делится на 2 и на 3*, $B :=$ *число делится на 6*;

и) $A :=$ *число делится на 4 и на 6*, $B :=$ *число делится на 24*;

а) Н; б) Д; в) НД; г) Д; д) НД; е) НД; ж) Н; з) НД; и) Д

2. Сформулируйте свойства параллелограмма в виде импликаций («если …, то …»). Какие из этих необходимых условий являются в то же время достаточными?

3. Сформулируйте признаки параллелограмма в виде импликаций. Какие из этих достаточных условий являются в то же время необходимыми?

4. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах. Является ли это утверждение критерием?

5. Сформулируйте признак делимости на 3 (про сумму цифр числа) в виде импликации. Сформулируйте обратное утверждение; верно ли оно? Является ли признак делимости на 3 критерием? Если да, то сформулируйте его как критерий.

6. а) Придумайте достаточное условие делимости на 3, которое не является необходимым. б) Придумайте необходимое условие делимости на 4, которое не является достаточным.

7. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он? Объясните данную ситуацию в терминах необходимых и достаточных условий.

8. Дано высказывание

$$A := \textit{живое существо является человеком}.$$

Придумайте: а) необходимое условие для A, которое не является достаточным; б) достаточное условие для A, которое не является необходимым.

9. Даны высказывания:

$$A := \textit{число } x \textit{ является корнем уравнения } (x-1)(x-2)=0,$$
$$B := \textit{число } x \textit{ является корнем уравнения } (x-1)(x-2)(x-3)=0.$$

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Какое из них является необходимым условием для другого (а какое — достаточным)? Какое из этих уравнений естественно считать следствием другого уравнения?

10. Даны высказывания:

$$A := \textit{число } x \textit{ является корнем уравнения } (x-1)(x-2)=0,$$
$$B := \textit{число } x \textit{ является корнем уравнения } (x^2-3x+2)(x^2+2x+3)=0.$$

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Логично ли назвать эти уравнения равносильными?

11. Даны высказывания:

$$A := \textit{число } x \textit{ является решением неравенства } x - 1 < 0,$$
$$B := \textit{число } x \textit{ является решением неравенства } x^2 - 1 < 0.$$

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Какое из них является необходимым условием для другого (а какое — достаточным)? Какое из этих неравенств естественно считать следствием другого неравенства?

12. Даны высказывания:

$$A := \textit{число } x \textit{ является решением неравенства } x^2 - 2x - 3 < 0,$$
$$B := \textit{число } x \textit{ является решением неравенства } |x - 1| < 2.$$

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Логично ли назвать эти неравенства равносильными?

13. Даны высказывания:

$$A := \textit{пара чисел } (x, y) \textit{ является решением системы } \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1; \end{cases}$$
$$B := \textit{пара чисел } (x, y) \textit{ является решением системы } \begin{cases} x^2 - 2y = 2, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Логично ли назвать эти системы равносильными?

14. Даны высказывания:

$$A := \textit{пара чисел } (x, y) \textit{ является решением системы } \begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ x - y = 1; \end{cases}$$
$$B := \textit{пара чисел } (x, y) \textit{ является решением уравнения } 3x + 2y = 5$$

(уравнение B получено сложением уравнений системы A).

Являются ли эти высказывания эквивалентными? Какое из них является необходимым условием для другого (а какое — достаточным)? Естественно ли считать уравнение B следствием системы A?

15. Найдите все значения a, при которых истинно утверждение:

а) для того, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - 7x + 6 < 0$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $|x - 3| < a$;

б) для того, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - 4x \leqslant 0$, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a < 0$.

$\boxed{\text{а) } a \geqslant 3;\ \text{б) } a \in [0; 3]}$