# Уравнения высших порядков

## Содержание



Методы решения уравнений третьей и четвёртой степени (формула Кардано и метод Феррари) выходят за рамки программы обычной школы. Поэтому если на олимпиаде вам попадается уравнение степени 3 или выше, то следует искать искусственный приём, приспособленный для решения именно этого уравнения. Таким приёмом может быть, например, удачная группировка с последующим разложением на множители или выявление устойчивых выражений с соответствующей заменой переменной.

Данная статья посвящена уравнениям вида $p(x) = 0$, где $p(x)$ — многочлен третьей степени и выше, и некоторым приёмам разложения такого многочлена на множители.

## 1 Непосредственная группировка

В простейших случаях многочлен удаётся разложить на множители, удачно группируя друг с другом слагаемые.

Задача 1. Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$.

Решение. Имеем:

$$x^2(2x-3) - 4(2x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-3)(x^2-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-3)(x-2)(x+2) = 0.$$

Ответ: $3/2$, $\pm 2$.

Задача 2. Решить уравнение $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

Решение. Группируем первое слагаемое с четвёртым, а второе — с третьим:

$$(x^3+8) - (3x^2+6x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x^2-2x+4) - 3x(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x^2-5x+4) = 0.$$

Ответ: $-2$, $1$, $4$.

Задача 3. (*МГУ, социологич. ф-т, 2004*) Решите уравнение

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2+9x) - 36}{\sqrt{x+3}} = 0.$$

Решение. Если поддаться искушению раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (тем более что сократится $18x$), то в возникшем кубическом уравнении придётся подбирать корень с целью разложить левую часть на множители. Данная процедура описана в следующем пункте и не представляет здесь никаких сложностей, однако необходимости в ней сейчас нет. Дело в том, что несколько вычурная запись условия содержит подсказку, как именно надо группировать слагаемые. Имеем:

$$x^3+9x^2+18x-2(x^2+9x)-36=x(x^2+9x)-2(x^2+9x)+18x-36=$$
$$=(x^2+9x)(x-2)+18(x-2)=(x-2)(x^2+9x+18)=(x-2)(x+3)(x+6).$$

Наше уравнение, таким образом, равносильно системе

$$\begin{cases}(x-2)(x+3)(x+6)=0,\\ x+3>0,\end{cases}$$

решением которой служит $x=2$.

Ответ: 2.

## 2 Подбор корня

Если $p(x)$ — многочлен, и $x_0$ — корень уравнения $p(x)=0$, то имеет место разложение на множители[1]:

$$p(x)=(x-x_0)q(x), \tag{1}$$

где $q(x)$ — также некоторый многочлен (степень которого, как легко видеть, на единицу меньше степени многочлена $p(x)$). Зная корень $x_0$, мы получаем разложение (1) путём последовательной группировки слагаемых.

Задача 4. Решить уравнение $x^3-9x^2+26x-24=0$.

Решение. Нетрудно видеть, что непосредственная группировка ничего хорошего не даёт. Однако можно убедиться прямым вычислением, что $x=2$ — корень данного уравнения, и поэтому левая часть должна иметь вид $(x-2)q(x)$. Значит, нам нужно последовательно выделять слагаемые, дающие множитель $x-2$:

$$x^3-9x^2+26x-24=x^3-2x^2-7x^2+14x+12x-24=x^2(x-2)-7x(x-2)+12(x-2).$$

Теперь наше уравнение приобретает вид

$$(x-2)(x^2-7x+12)=0$$

и легко решается.

Ответ: 2, 3, 4.

Всё это замечательно, но как подобрать корень? Никакой общей процедуры, к сожалению, не существует. Тем не менее, в важном частном случае уравнения с *целыми* коэффициентами имеет место следующее утверждение.

Теорема. Если уравнение

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{2}$$

с целыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет целочисленный корень $x_0$, то $x_0$ является делителем свободного члена $a_n$.

[1]Это следствие *теоремы Безу*, которая гласит, что остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x-x_0$ равен $p(x_0)$; значит, если $x_0$ — корень многочлена $p(x)$, то указанный остаток равен нулю.

Доказательство. Поскольку $x_0$ — корень данного уравнения, имеет место равенство

$$x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + a_2 x_0^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_0 + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -x_0^n - a_1 x_0^{n-1} - a_2 x_0^{n-2} - \ldots - a_{n-1} x_0.$$

Как видим, $a_n$ делится на $x_0$. Теорема доказана.

Вернёмся к уравнению $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, рассмотренному выше. Делителями свободного члена $-24$ служат числа $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 4$, $\pm 6$, $\pm 8$, $\pm 12$ и $\pm 24$. Все корни данного уравнения (а именно, 2, 3 и 4) являются целыми числами и находятся среди указанных делителей.

Поэтому, пытаясь решить уравнение (2), мы ищем его корень среди делителей свободного члена (поочерёдно подставляя эти делители в уравнение). Если нам повезёт и один из делителей в самом деле окажется корнем, то мы разложим левую часть (2) на множители и упростим задачу[2].

Теорема о целочисленном корне, сформулированная выше, относится к уравнению, в котором коэффициент при старшей степени $x$ равен 1. А как быть в общем случае? Имеется соответствующее обобщение данной теоремы, но на практике можно обойтись и без него, просто умножая уравнение на подходящее число и вводя новую переменную.

Задача 5. Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = 0$.

Решение. Умножим уравнение на 4 (чтобы первое слагаемое стало точным кубом):

$$8x^3 - 12x^2 - 20x + 12 = 0,$$

после чего введём новую переменную $t = 2x$:

$$t^3 - 3t^2 - 10t + 12 = 0.$$

Непосредственно убеждаемся, что $t = 1$ — корень данного уравнения, и последовательно группируем:

$$\begin{aligned} t^3 - 3t^2 - 10t + 12 &= t^3 - t^2 - 2t^2 + 2t - 12t + 12 = \\ &= t^2(t-1) - 2t(t-1) - 12(t-1) = (t-1)(t^2 - 2t - 12). \end{aligned}$$

Отсюда получаем два других корня: $t = 1 \pm \sqrt{13}$, и остаётся лишь найти соответствующие значения $x$.

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

## 3 Формулы Виета для кубического уравнения

Предположим, что кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (3)$$

имеет три корня $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Тогда многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

[2] Но может случиться и так, что ни один делитель не подойдёт. Тогда уравнение (2) не имеет целочисленных корней, и придётся искать другие способы решить его. Такие ситуации будут рассмотрены в следующей статье «Замена переменной».

Раскроем в этом равенстве скобки и приведём подобные слагаемые:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3. \qquad (4)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}\,, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}\,, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}\,. \end{cases} \qquad (5)$$

Соотношения (5) называются *формулами Виета* для кубического уравнения (3).

## 4 Задачи

**1.** Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = 0$; б) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = 0$;
в) $x^3 + 6x^2 - 12x - 8 = 0$; г) $x^3 + 7x^2 + 21x + 27 = 0$.

а) $-3, \pm\sqrt{5}$; б) $2, \sqrt[3]{3}$; в) $2, -4 \pm 2\sqrt{3}$; г) $-3$

**2.** Решите уравнение:

а) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0$; б) $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0$;
в) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$; г) $27x^3 - 15x^2 + 5x - 1 = 0$.

а) $-2, -\frac{3}{2}$; б) $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$

**3.** (*«Физтех», 2016, 9.2*) Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, где $a$ и $b$ — соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 7x^2 + 7x = 1$.

34

**4.** Решите уравнение:

а) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$; б) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$;
в) $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$; г) $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

а) $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 3$; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

**5.** Решите уравнение:

а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; б) $x^3 - 13x - 12 = 0$;
в) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$; г) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$;
д) $x^3 - 3x + 2 = 0$; е) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

а) 1, 2, 3; б) −1, −3, 4; в) 1; г) −1, 2; д) 1, −2; е) −1, 2, 3

**6.** Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$; б) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$;
в) $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$; г) $x^3 + 5x^2 + 5x - 3 = 0$.

а) $-2, 3, -4$; б) $2, -3, 5$; в) $3$; г) $-3, -1 \pm \sqrt{2}$

**7.** Решите уравнение:

а) $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16 = 0$; б) $x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6 = 0$.

а) $1, \pm 2, -4$; б) $-1, 3$

**8.** Решите уравнение:

а) $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$; б) $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$; ;
в) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$; г) $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

а) $\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\pm\frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

**9.** (*МГУ, социологич. ф-т, 2004*) Решить уравнение

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 10x - 3(x^2 + 7x) - 30}{\sqrt{x+2}} = 0.$$

3

**10.** (*МГУ, ф-т почвоведения, 2005.1*) Решить уравнение

$$(6x - 15)^7 = (x - 1)^{14}.$$

4

**11.** (*«Ломоносов», 2011, 8.3*) Решите уравнение

$$\frac{x^7 - 1}{x^5 - 1} = \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}\,.$$

0, −1

**12.** (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.1*) Имеет ли отрицательные корни уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0\,?$$

**13.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.1*) Решите уравнение

$$\left(1 + x + x^2\right)\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^6\right)^2.$$

−1, 0

**14.** (*«Физтех», 2013, 9.3, 10.1, 11.1*) Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 35 = 0.$$

$\boxed{-5}$

**15.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.4*) Найдите количество общих точек графиков функций

$$y = x^3 + 6x \quad \text{и} \quad y = 12x^2 + 1,$$

а также абсциссы этих точек.

$\boxed{\text{Одна точка с абсциссой } \frac{1}{2-\sqrt[3]{7}}}$

**16.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.2*) Какие значения может принимать выражение $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, где $x_1$ и $x_2$ — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3-2015x+2016=0$?

$\boxed{2015}$

**17.** (*Всеросс., 2019, ШЭ, 10.5*) Дано положительное число $a$. Известно, что уравнение $x^3+1=ax$ имеет ровно два положительных корня, и отношение большего из них к меньшему равно 2018. Уравнение $x^3+1=ax^2$ также имеет ровно два положительных корня. Докажите, что отношение большего из них к меньшему также равно 2018.

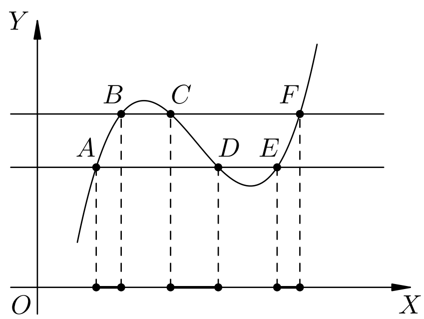
**18.** (*ММО, 2018, 11.1*) Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)\, x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)\, x^2 + 1.$$

**19.** (*Всеросс., 1998, финал, 10.1, 11.1*) Прямые, параллельные оси $OX$, пересекают график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d:$$

первая — в точках $A$, $D$ и $E$, вторая — в точках $B$, $C$ и $F$ (см. рисунок). Докажите, что длина проекции дуги $CD$ на ось $OX$ равна сумме длин проекций дуг $AB$ и $EF$.




**20.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2*) Найдите сумму $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа $x$, $y$ и $z$ удовлетворяют условиям:

$$x^3 + 1009 = 2018x, \quad y^3 + 1009 = 2018y, \quad z^3 + 1009 = 2018z$$

$\boxed{2}$

**21.** (*ММО, 2016, 10.3*) Уравнение с целыми коэффициентами $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента $b$ при этих условиях.

$\boxed{6}$

**22.** (*«Ломоносов», 2014, 8.8, 9.8*) Известно, что $x_1$, $x_2$, $x_3$ — различные корни уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Составьте уравнение наименьшей степени, корнями которого являются числа $\frac{x_1+1}{x_1-1}$, $\frac{x_2+1}{x_2-1}$ и $\frac{x_3+1}{x_3-1}$.

$\boxed{t^3 - 7t^2 - t - 1 = 0}$

**23.** (*«Ломоносов», 2012, 10–11.7*) Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения

$$x^5 + 2010x^2 + 2011 = x^4 + 2011x^3 + 2012x.$$

$\boxed{4025}$

**24.** (*ММО, 2011, 11.2*) Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов

$$x^{2011} + 2011x - 1 \quad \text{и} \quad x^{2011} - 2011x + 1.$$

**25.** (*ММО, 2017, 11.3*) Пусть $x_0$ — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$, а $y_0$ — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3x_0$.

а) Сравните $x_0$ и $y_0$.

б) Найдите десятый знак после запятой числа $|x_0 - y_0|$.