Деревья

Дерево — это связный граф без циклов.

1. Нарисуйте какое-нибудь дерево на 3, 4, 5, 6, 7 вершинах. Убедитесь, что в каждом случае число рёбер получается на единицу меньше числа вершин.

2. Докажите, что для любых двух различных вершин дерева существует единственная соединяющая их простая цепь.

3. Для графа G на n вершинах известно, что между любыми двумя его различными вершинами существует единственная простая цепь. Докажите, что G связен и число рёбер в нём равно $n-1$.

Индукция по числу вершин. Берём две смежные вершины. . .

4. В связном графе число рёбер на единицу меньше числа вершин. Докажите, что граф не содержит циклов.

Пусть есть цикл C. Для любой вершины $v \notin C$ берём кратчайший путь от v к C

5. Пусть в графе нет циклов и число рёбер на единицу меньше числа вершин. Докажите, что этот граф является деревом.

Пусть число компонент связности равно k. . .

Из задач 2–5 имеем три различных *характеризации дерева*. А именно, следующие утверждения эквивалентны:

- G — дерево;
- для любых двух различных вершин G существует единственная соединяющая их простая цепь;
- G связен, и число рёбер в нём на единицу меньше числа вершин;
- G не содержит циклов, и число рёбер в нём на единицу меньше числа вершин.

6. В дереве T самая длинная простая цепь состоит из 20 рёбер. Докажите, что в T найдётся вершина, из которой до любой другой вершины существует путь, состоящий самое большее из 10 рёбер.

7. Связный граф при удалении любого ребра перестаёт быть связным. Докажите, что этот граф является деревом.

8. (*Ещё раз*) Число рёбер связного графа не меньше числа вершин. Докажите, что в этом графе имеется цикл.

9. В графе на n вершинах число рёбер не превосходит $n-2$. Докажите, что граф не связен.

Задачи 8 и 9 говорят вот о чём. Из «жирного» графа с большим числом рёбер можно выкидывать рёбра без потери связности (ликвидируя циклы) до тех пор, пока не останется наиболее «тощий» граф — дерево.

10. Какое наименьшее число рёбер может иметь граф на 10 вершинах с тремя компонентами связности?

$\boxed{7}$

11. Сколько рёбер у графа на 20 вершинах, который не содержит циклов и имеет 6 компонент связности?

$\boxed{14}$

12. Докажите, что у любого дерева (с не менее чем двумя вершинами) найдётся *лист* — вершина степени 1.

13. Какое наименьшее число листьев может иметь дерево на 15 вершинах, если максимальная степень вершины этого дерева равна 6?

$\boxed{6}$

14. Докажите, что любое дерево является двудольным графом.

15. Граф имеет n вершин и не содержит простых циклов чётной длины. Докажите, что число рёбер этого графа не превосходит $3(n-1)/2$.

Звезда S_k с k концами — это дерево с $k+1$ вершиной, из которых k являются висячими.

16. Докажите, что любое дерево на m^n вершинах имеет подграф S_{m+1} или P_{2n} (простую цепь на $2n$ вершинах).

17. (*«Курчатов», 2018, 11*) Последовательность различных клеток a_1, a_2, $\ldots$, a_k клетчатого квадрата $n \times n$ называется *циклом*, если, во-первых, $k \geqslant 4$, и, во-вторых, клетки a_j и a_{j+1} являются соседними по стороне при всех $j = 1, 2, \ldots, k$ (считаем при этом, что $a_{k+1} = a_1$). Множество X клеток квадрата назовём *разделяющим*, если в любом цикле есть хотя бы одна клетка из множества X. Найдите наименьшее вещественное число C такое, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ в квадрате $n \times n$ существует разделяющее множество из не более чем $C \cdot n^2$ клеток.

18. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n, что на любом авиамаршруте, начинающемся в X, номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016.

19. В дереве n вершин, v — одна из них, ребро e выходит из v. Обозначим $k(v, e)$ число вершин, в которые можно пройти из v по простой цепи, начинающейся с ребра e.

а) Чему равна сумма чисел $k(v, e)$ по всем рёбрам e, выходящим из v?

б) Пусть ребро e соединяет вершины u и v. Докажите, что $k(u, e) \cdot k(v, e) \geqslant n - 1$.

20. (*Всеросс., 2003, финал, 10*) Дано дерево с n вершинами, $n \geqslant 2$. В его вершинах расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а на каждом ребре записано произведение чисел, стоящих в концах этого ребра. Обозначим через S сумму чисел на всех рёбрах. Докажите, что

$$\sqrt{n-1}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \geqslant 2S.$$

21. (*Всеросс., 2001, финал, 10*) В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.

22. (*ММО, 2016, 10*) В однокруговом хоккейном турнире принимало участие 2016 команд. По регламенту турнира за победу даётся 3 очка, за поражение 0 очков, а в случае ничьей назначается дополнительное время, победитель которого получает 2 очка, а проигравший — 1 очко. По окончании турнира Остапу Бендеру сообщили количество очков, набранных каждой командой, на основании чего он сделал вывод, что не менее N матчей закончились дополнительным временем. Найдите наибольшее возможное значение N.

1512