Теория Рамсея

Рассмотрим граф на n вершинах. С ростом n таких графов становится всё больше, они становятся всё сложнее, но тем не менее оказывается, что «полный хаос» невозможен: начиная с некоторого n мы можем гарантировать, что в любом графе на n вершинах появится подграф с определёнными свойствами. Подобными вопросами занимается *теория Рамсея*.

Графы, как обычно, считаются помеченными, то есть их вершины занумерованы:

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}.$$

1. Верно ли, что в любой компании из 5 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых?

Нет

2. (*Putnam Math. Competition, 1953*) The complete graph with 6 points and 15 edges has each edge colored red or blue. Show that we can find 3 points such that the 3 edges joining them are the same color.

Независимое множество мощности n обозначаем I_n (от англ. independent set).

3. Докажите, что любой граф на 6 вершинах содержит либо K_3, либо I_3.

4. Докажите, что любой граф на 9 вершинах содержит либо K_3, либо I_4.

Для любых натуральных s и t *число Рамсея* $R(s,t)$ — это минимальное n, при котором любой граф на n вершинах содержит либо K_s, либо I_t.

(*Примечание.* Под вопросом пока корректность этого определения: почему такое минимальное n существует? Это следует из задачи 9.)

Из задач 1–3 следует, что $R(3,3) = 6$. Из задачи 4 следует, что $R(3,4) \leqslant 9$.

5. Докажите, что $R(3,4) = 9$.

6. Докажите, что $R(s,t) = R(t,s)$.

7. Объясните, почему $R(1,t) = 1$. Докажите, что $R(2,t) = t$.

8. (*Неравенство Эрдёша — Секерёша*) Докажите, что

$$R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1). \tag{1}$$

9. С помощью неравенства (1) докажите, что

$$R(s,t) \leqslant C_{s+t-2}^{s-1}.$$

(Отсюда как раз и следует существование чисел Рамсея для любых s и t.)

10. Получите верхнюю оценку диагонального числа Рамсея:

$$R(s,s) < 4^{s-1}.$$

Замечание. Наилучшая известная на сегодняшний день асимптотическая верхняя оценка:

$$R(s,s) \leqslant e^{-\gamma \frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}} \cdot 4^s \quad (\gamma > 0).$$

Никому не известно, существует ли такое $\alpha > 0$, что $R(s,s) \leqslant (4-\alpha)^s$.

Теперь займёмся доказательством нижней оценки для диагональных чисел Рамсея:

$$R(s,s) > \left[2^{\frac{s}{2}}\right] \quad (s \geqslant 3). \tag{2}$$

Фиксируем натуральное n (мы потом положим $n = \left[2^{s/2}\right]$). Неравенство $R(s,s) > n$ означает, что найдётся граф на n вершинах, не содержащий ни K_s, ни I_s. Мы докажем это *неконструктивно* — не приводя явного примера такого графа, а лишь убедившись в том, что графов, содержащих K_s или I_s, меньше, чем общее количество графов на n вершинах.

11. Сколько всего существует графов на n вершинах?

$\boxed{2^{C_n^2}}$

12. Зафиксируем множество $A \subset V$, содержащее s вершин.

а) Сколько существует графов с вершинами из V, у которых подграф, порождённый множеством A, является полным?

б) Сколько существует графов с вершинами из V, у которых A является независимым множеством?

а) $2^{C_n^2 - C_s^2}$; б) столько же

13. Покажите, что количество графов на n вершинах, содержащих K_s или I_s, не превосходит

$$C_n^s \cdot 2^{C_n^2 - C_s^2 + 1}.$$

14. Пусть p — *доля* графов на n вершинах, содержащих K_s или I_s, в общей совокупности графов на n вершинах. Докажите, что

$$p < \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1 - \frac{s(s-1)}{2}}.$$

15. Полагая $n = \left[2^{s/2}\right]$, докажите, что $p < 1$. Выведите отсюда оценку (2).

Вы, должно быть, почувствовали, что величина p есть не что иное, как *вероятность* (именно поэтому она так и обозначена). В задаче 15 мы по сути доказали следующее: если рассматривать случайные графы на n вершинах (появление или непоявление ребра между любой парой вершин происходит с равной вероятностью), то граф без K_s и I_s появится *с положительной вероятностью* — а это и означает его существование!

Вероятностный метод — очень мощный инструмент современной комбинаторики. Его придумал Пол Эрдёш, один из крупнейших математиков XX столетия. О вероятностном методе можно почитать в следующих книгах:

1. А. М. Райгородский. Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2008.
2. Н. Алон, Дж. Спенсер. Вероятностный метод. М.: БИНОМ, 2011.

Приведём напоследок забавное воспоминание Джоэла Спенсера (соавтора второй из процитированных книг) о том, как Эрдёш оценивал сложность нахождения чисел Рамсея.

> Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6,6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens.

Обобщение чисел Рамсея

Число Рамсея $R(s,t)$ есть наименьшее n, такое, что при любой раскраске рёбер графа K_n в красный и синий цвета в нём найдётся красный подграф K_s или синий подграф K_t. Данное определение естественно обобщается: величина $R(G,H)$ есть наименьшее такое n, что при любой раскраске рёбер графа K_n в красный и синий цвета в нём найдётся красный подграф G или синий подграф H. При этом обычные числа Рамсея действительно оказываются частным случаем, а именно $R(s,t) = R(K_s, K_t)$.

16. Верно ли, что число $R(G,H)$ конечно для любых графов G и H на s и t вершинах соответственно?

Да

17. Найдите: а) $R(P_3, P_3)$; б) $R(P_4, P_4)$.

а) 3; б) 5

18. Докажите, что $R(G,G) \geqslant 6$ для любого графа G с хроматическим числом 3.

19. Пусть S_5 — звезда с пятью концами (дерево на шести вершинах, пять из которых — висячие). Найдите $R(S_5, S_5)$.

10

20. Пусть T_5 — произвольное дерево на пяти вершинах. Найдите $R(T_5, K_4)$.

13