Планарные графы. Формула Эйлера

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости *правильно*, то есть без внутренних пересечений рёбер. Планарный граф вместе со своим правильным изображением называется *плоским.*

Наряду с числом вершин v и числом рёбер e планарный граф имеет ещё одну важную характеристику: *число граней* f. Число граней есть число областей, на которые правильное изображение графа разбивает плоскость (учитывается и внешняя грань — бесконечная область); число граней не зависит от конкретного правильного изображения данного графа.

Формула Эйлера. В связном планарном графе $v - e + f = 2$.

1. Зафиксировав v, докажите формулу Эйлера индукцией по числу рёбер. База индукции — дерево ($e = v - 1$).

2. (*Обобщение формулы Эйлера*) Пусть плоский граф состоит из k компонент связности. Докажите, что $v - e + f = k + 1$.

3. Определим *размер* грани как сумму длины ограничивающего её простого цикла (если он есть) и удвоенного числа её внутренних рёбер (если они есть).

а) Внутри треугольника ABC взяли точку D и провели отрезок AD; получился плоский граф на вершинах A, B, C, D. Найдите размеры его граней.

б) Для дерева на n вершинах найдите размер его (единственной) грани.

в) Связный плоский граф имеет грань, размер которой не превосходит 2. Что это за граф?

г) Покажите, что сумма размеров всех граней связного плоского графа равна удвоенному числу его рёбер.

а) 5 и 3; б) $2n - 2$; в) дерево не более чем на двух вершинах

4. Пусть в плоском связном графе $v \geqslant 3$. Докажите, что $2e \geqslant 3f$. С помощью формулы Эйлера выведите отсюда неравенство $e \leqslant 3v - 6$.

Примечание. В произвольном связном графе число рёбер ограничено сверху квадратичной функцией числа вершин: $e \leqslant C_v^2 = \frac{v(v-1)}{2}$. Как видим, в планарном связном графе условия ужесточаются: число рёбер не превосходит линейной функции v (планарный граф не может быть «слишком жирным»).

5. Убедитесь, что K_4 планарен. Докажите, что K_n не планарен при $n \geqslant 5$.

6. Какое наименьшее число внутренних пересечений рёбер может получиться при изображении на плоскости графа K_5?

1

7. Какой может быть минимальная степень вершины планарного графа на 11 вершинах?

2, 3 или 4

8. Каждое ребро графа K_{11} покрашено в красный или синий цвет. Докажите, что подграф на красных рёбрах или подграф на синих рёбрах не планарен.

9. Пусть в плоском связном графе $v \geqslant 3$ и дополнительно известно, что граф двудольный. Докажите, что $e \geqslant 2f$. С помощью формулы Эйлера выведите отсюда неравенство $e \leqslant 2v - 4$.

Примечание. Понятно, что дополнительное условие двудольности ведёт к ещё более жёсткому ограничению на число рёбер.

10. Убедитесь, что $K_{2,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,4}$ (и вообще $K_{2,n}$) планарны. Докажите, что $K_{3,n}$ не планарен при $n \geqslant 3$.

11. Какое наименьшее число внутренних пересечений рёбер может получиться при изображении на плоскости графа $K_{3,3}$?

$\boxed{1}$

12. Докажите, что если в связном плоском графе нет грани, ограниченной циклом нечётной длины, то этот граф двудольный.

13. Все грани плоского графа ограничены циклами длины 4, а все его вершины имеют одинаковую степень d. Какие значения может принимать d?

$\boxed{\text{2 или 3}}$

14. Докажите, что в планарном графе найдётся вершина, степень которой не превосходит 5.

15. Докажите, что хроматическое число $\chi(G)$ планарного графа G не превосходит 6.

Примечание. На самом деле $\chi(G) \leqslant 5$ (это *теорема Хивуда о пяти красках*) и даже $\chi(G) \leqslant 4$ (а это — знаменитая *проблема четырёх красок*, доказанная на сегодняшний день лишь с помощью компьютерного анализа большого числа случаев).

16. Граф называется *внешнепланарным*, если его можно так нарисовать на плоскости, что все вершины графа будут принадлежать внешней грани. Чему может быть равно хроматическое число внешнепланарного графа, имеющего хотя бы одно ребро?

$\boxed{\text{2 или 3}}$