Графы пересечений

Пусть дано n-элементное множество A. Вершинами *графа пересечений* служат различные подмножества $M_1, \ldots, M_s$ множества A; рёбрами соединяются те или иные вершины в зависимости от условий конкретной задачи. Могут возникать, например, такие ситуации:

- вершины M_i и M_j смежны $\Leftrightarrow$ множества M_i и M_j имеют непустое пересечение;
- вершины M_i и M_j смежны $\Leftrightarrow$ множества M_i и M_j пересекаются в точности по одному элементу;
- вершины M_i и M_j смежны $\Leftrightarrow$ множества M_i и M_j не пересекаются.

1. (*Турнир городов, 1985, 7–10*) В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу. Доказать, что найдутся такие два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

Примечание. Вместо этой задачи можно сразу решать следующую, которая сформулирована более общим образом и в нужном нам виде.

2. Пусть $\mathscr{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ — набор различных трёхэлементных подмножеств n-элементного множества. Докажите, что если $s > n$, то найдутся два множества из $\mathscr{M}$, пересекающиеся ровно по одному элементу.

3. (*ММО, 2012, 10*) Рассмотрим граф, у которого вершины соответствуют всевозможным трёхэлементным подмножествам множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$, а рёбра проводятся между вершинами, которые соответствуют подмножествам, пересекающимся ровно по одному элементу. Найдите минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, были разного цвета.

4. (*ММО, 2016, 9*) В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно три языка, причём для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k. Оказалось, что $11n \leqslant k \leqslant m/2$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.