

Экстремальные характеристики графов

Экстремальные характеристики графа — это размеры наибольших или наименьших множеств, связанных с его вершинами или рёбрами. Одна такая характеристика нам уже известна: *хроматическое число* $\chi(G)$ есть наименьшее количество цветов, нужное для такой раскраски вершин графа G , чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

Как обычно, рассматривается граф $G = (V, E)$ без петель, кратных рёбер и ориентации. Говоря о множествах вершин графа, мы имеем в виду подмножества множества V .

Множество вершин графа называется *независимым*, если никакие две вершины этого множества не соединены ребром. Подграф, порождённый вершинами независимого множества, является набором изолированных вершин.

Теперь можно сказать, что хроматическое число $\chi(G)$ есть такое наименьшее m , что множество всех вершин графа G распадается в дизъюнктное объединение $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_m$ независимых множеств V_1, V_2, \dots, V_m . Понятно, что указанные независимые множества — это и есть цвета.

Независимое множество называется *максимальным по включению*, если при добавлении к нему любой другой вершины оно перестаёт быть независимым.

Независимое множество M называется *максимальным по размеру*, если не существует независимого множества большей мощности, чем $|M|$. Понятно, что все максимальные по размеру независимые множества имеют одинаковую мощность; она обозначается $\alpha(G)$ и называется *числом независимости* графа G .

1. Найдите число независимости и хроматическое число графа: а) K_n ; б) $K_{n,n}$.

$$\chi = \chi \quad \alpha = \alpha \quad (g \quad u = \chi \quad \Gamma = \alpha \quad (v$$

2. Верно ли, что максимальное по размеру независимое множество является максимальным по включению?

3. Покажите, что максимальное по включению независимое множество не обязательно является максимальным по размеру; иными словами, мощность максимального по включению независимого множества может оказаться меньше числа независимости.

4. Множество $D \subset V$ называется *доминирующим*, если любая вершина из $V \setminus D$ соединена ребром с некоторой вершиной из D . Покажите, что максимальное по включению независимое множество является доминирующим.

Множество вершин графа называется *кликой*, если любые две вершины этого множества соединены ребром. Подграф, порождённый кликой, является полным.

Максимальная по размеру клика — это клика наибольшей мощности. Все максимальные по размеру клики имеют одинаковую мощность, которая обозначается $\omega(G)$ и называется *кликковым числом* графа G .

5. *Дополнением* графа G называется граф \overline{G} , вершинами которого являются вершины G , а две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G . Покажите, что:

а) независимое множество в G является кликой в \overline{G} и наоборот, клика в G является независимым множеством в \overline{G} ;

б) $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$ и $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$.

6. Докажите, что для любого графа G на n вершинах выполнено неравенство

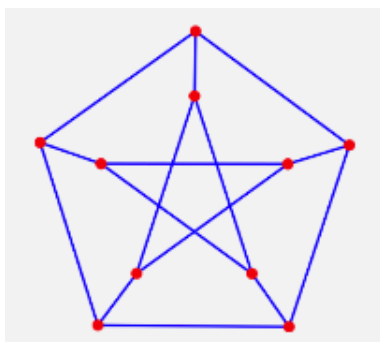
$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

7. Докажите неравенства:

а) $\chi(G) \geq \omega(G)$; б) $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

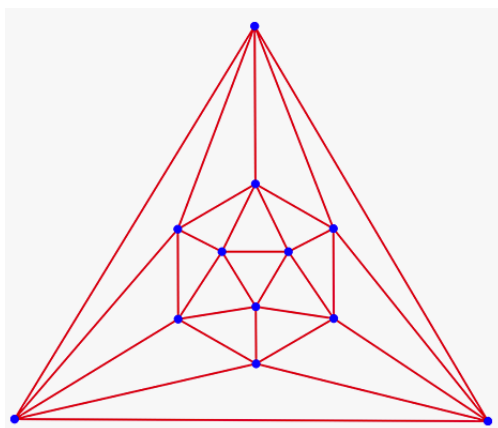
Проверьте данные неравенства для графов K_n и $K_{n,n}$.

8. Найдите число независимости и хроматическое число *графа Петерсена* (см. рисунок). Проверьте неравенства задачи 7. Какое наименьшее количество рёбер надо удалить из этого графа, чтобы он стал двудольным?



$$\alpha = 4, \chi = 3 \text{ рёбер}$$

9. Найдите число независимости и хроматическое число графа на рисунке. Проверьте неравенства задачи 7.



$$\alpha = 4, \chi = 3$$

Неравенства задачи 7 являются стандартными оценками снизу для хроматического числа. Существует и оценка сверху.

10. Докажите, что $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, где $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G . Для каких двух очевидных типов графов в этой оценке достигается равенство?

Примечание. Оказывается, что для всех остальных графов оценка немного улучшается. Именно, *теорема Брукса* гласит, что $\chi(G) \leq \Delta(G)$ для любого графа G , не являющегося полным графом или циклом нечётной длины.

Множество вершин графа называется *вершинным покрытием*, если хотя бы один из концов любого ребра принадлежит данному множеству. Размер наименьшего по мощности вершинного покрытия обозначается $\tau(G)$.

11. Докажите, что:

- а) Множество S является вершинным покрытием тогда и только тогда, когда его дополнение $V \setminus S$ — независимое множество;
- б) $\alpha(G) + \tau(G) = |V|$.

12. Граф $G = (V, E)$ не содержит треугольников. Докажите, что $\tau(G) \geq \frac{|E|}{\alpha(G)}$.

13. Граф имеет 8 вершин, 16 рёбер и не содержит треугольников. Чему равно число независимости этого графа?

□

14. (*ММО, 2018, 9.6*) На олимпиаду пришло 2018 участников, некоторые из них знакомы между собой. Будем говорить, что несколько попарно знакомых участников образуют «кружок», если любой другой участник олимпиады не знаком с кем-то из них. Докажите, что можно рассадить всех участников олимпиады по 90 аудиториям так, что ни в какой аудитории не будут сидеть все представители какого-либо «кружка».

15. (*ММО, 2012, 10.6*) Рассмотрим граф, у которого вершины соответствуют всевозможным трёхэлементным подмножествам множества $\{1, 2, 3, \dots, 2^k\}$, а рёбра проводятся между вершинами, которые соответствуют подмножествам, пересекающимся ровно по одному элементу. Найдите минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, были разного цвета.