Эйлеровы графы

Эйлеров цикл — это цикл, проходящий по каждому ребру (мульти)графа ровно один раз. Подчеркнём, что, говоря здесь о графах, мы имеем в виду и мультиграфы тоже (разрешены кратные рёбра, но не петли и ориентация); ведь исходная задача о кёнигсбергских мостах была сформулирована именно для мультиграфа. *Эйлеров граф* — это граф, в котором существует эйлеров цикл.

1. Граф с вершиной нечётной степени не может быть эйлеровым. Объясните, почему.

2. В связном графе степень каждой вершины чётна. Докажите, что множество рёбер графа распадается в дизъюнктное объединение простых циклов (т. е. попарно не пересекающихся по рёбрам; общие вершины у этих циклов могут быть).

Фиксируем вершину, идём из неё по рёбрам, находим цикл, удаляем его рёбра…

3. Докажите, что если множество рёбер связного графа распадается в дизъюнктное объединение простых циклов, то граф является эйлеровым.

Индукция по числу простых циклов

Из задач 1–3 следует важная характеризация эйлеровых графов. Именно, для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:

- G — эйлеров;
- степень каждой вершины G чётна;
- множество рёбер G распадается в дизъюнктное объединение простых циклов.

4. При каких n граф K_n является эйлеровым?

При нечётных $n \geqslant 3$

5. При каких m, n граф $K_{m,n}$ является эйлеровым?

При чётных $m, n \geqslant 2$

6. В графе G все вершины имеют чётную степень. Докажите, что рёбра G можно ориентировать так, чтобы для каждой вершины число входящих в неё ребер равнялось числу выходящих.