Перечисление графов

Говоря о графе, мы имеем в виду *помеченный простой* граф, т. е. граф без петель, кратных рёбер и ориентации, вершины которого пронумерованы. Два помеченных графа различны, если их множества рёбер не совпадают.

1. Найдите:
а) число графов на n вершинах;
б) число графов на n вершинах с k рёбрами.

а) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; б) $C^k_{\frac{n(n-1)}{2}}$

2. Сколько имеется графов на $n \geqslant 2$ вершинах с чётным числом рёбер?

$2^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

3. Найдите число мультиграфов на n вершинах с k рёбрами.

$C^k_{\frac{n(n-1)}{2}+k-1}$

4. Найдите
а) число орграфов на n вершинах;
б) число псевдографов на n вершинах.

а) $4^{\frac{n(n-1)}{2}}$; б) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

5. Сколько разных помеченных графов можно получить путём перенумерации вершин:
а) графа K_n;
б) простого пути P_n на n вершинах;
в) простого цикла C_n на n вершинах;
г) графа $K_{n,n}$?

а) 1; б) $n!/2$; в) $(n-1)!/2$; г) $C^n_{2n}/2$

6. Покажите, что число различных простых циклов графа K_n равно

$$\sum_{k=3}^{n} C_n^k \frac{(k-1)!}{2}\,.$$

Перечисление деревьев

7. Сколько существует различных (помеченных) деревьев на а) 2; б) 3; в) 4 вершинах?

а) 1; б) 3; в) 16

8. Учитывая, что имеется 125 различных деревьев на 5 вершинах, попробуйте угадать общую формулу для числа t_n деревьев на n вершинах.

Наша цель — доказать *формулу Кэли*:

$$t_n = n^{n-2}.$$

Мы сделаем это, показав, что деревьев на n вершинах столько же, сколько всевозможных последовательностей длины $n-2$, составленных из чисел 1, 2, …, n.

Пусть вершины дерева занумерованы числами 1, 2, …, n ($n \geqslant 3$). Сопоставим дереву последовательность из этих чисел длины $n-2$ (*код Прюфера*) по следующему алгоритму.

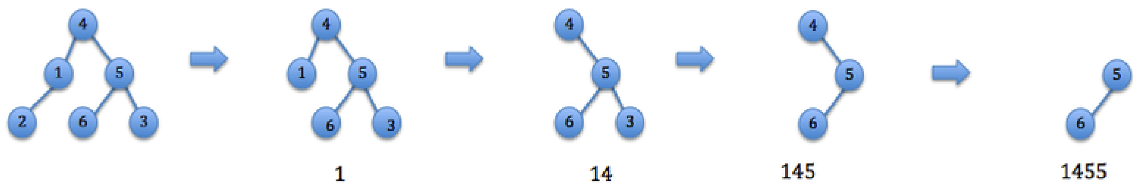
1. Находим лист с минимальным номером.

2. Пишем в код номер смежной с ним вершины.

3. Удаляем этот лист из дерева вместе с его ребром.

4. Если число вершин по-прежнему больше двух, возвращаемся к шагу 1; иначе — завершаем работу.

На рисунке показан пример построения кода Прюфера (равного в данном случае 1455).



9. Нарисуйте дерево на 7 вершинах и составьте для него код Прюфера.

10. Существует ли дерево с кодом Прюфера 121212?

Да

11. Докажите, что:

а) код Прюфера состоит из номеров всех вершин, не являющихся листьями;

б) количество вхождений номера вершины в код Прюфера на единицу меньше степени этой вершины.

12. Покажите, что разным деревьям соответствуют разные коды Прюфера.

13. Опишите деревья, код Прюфера которых состоит из: а) одинаковых; б) попарно различных чисел.

а) звёзды; б) пути

Обратно, дерево однозначно восстанавливается по своему коду Прюфера. Распаковка кода Прюфера $c_1c_2\dots c_{n-2}$ осуществляется по следующему алгоритму (мы допускаем понятные вольности записи).

1. $V = \{1, 2, \dots, n\}$; $C = c_1c_2\dots c_{n-2}$; $i = 0$.

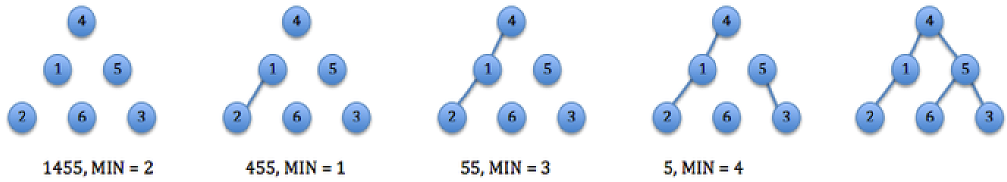
2. $i = i + 1$.

3. Находим в V минимальное число m, не входящее в C; пишем ребро (m, c_i).

4. $V = V - m$.

5. Если $i < n-2$, то $C = C - c_i$ и возвращаемся к шагу 2; иначе — пишем ребро из двух чисел, оставшихся в V, и завершаем работу.

На выходе алгоритма имеем $n-1$ рёбер дерева. Вот как работает алгоритм, распаковывая код 1455 из вышеприведённого примера:



14. Примените алгоритм распаковки к вашему коду из задачи 9 и убедитесь, что получается исходное дерево.

15. Покажите, что *любая* последовательность длины $n-2$, составленная из чисел $1, 2, \ldots, n$, является кодом Прюфера некоторого дерева.

16. Докажите (по индукции), что при распаковке кода Прюфера не могут возникать циклы. Сделайте вывод, что декодированный граф непременно является деревом.

17. Докажите формулу Кэли.

18. Найдите число деревьев с заданной последовательностью степеней вершин; именно, степени вершин 1, 2, ..., n равны соответственно d_1, d_2, ..., d_n.

$t(d_1, \ldots, d_n) = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}$

Перечисление унициклических графов

Граф называется *унициклическим*, если он связный и содержит в точности один простой цикл.

19. Докажите, что граф является унициклическим тогда и только тогда, когда число его рёбер равно числу вершин.

20. Сколько циклов может быть в графе с n вершинами и $n+1$ рёбрами?

2 или 3

21. Докажите формулу для числа всех унициклических графов на n вершинах:

$$u_n = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} C_n^k k! n^{n-k-1}.$$