

## Параметры. Графики

Данный листок посвящён задачам с параметрами, в которых существенную помощь оказывает построение графиков функций или областей на координатной плоскости.

1. («Шаг в будущее», 2018, 8.3) Найдите все такие  $k$  и  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y + 2|x| = 2, \\ y = kx + b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

$$\boxed{z = 0; z = 1}$$

2. («Шаг в будущее», 2023, 8.4) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$|x - 2 + |2x + 2|| = a$$

имеет нечетное количество решений?

$$\boxed{\xi = 0}$$

3. («Шаг в будущее», 2021, 8.4) При каких значениях параметра  $a$  площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости  $xOy$  линиями  $y = \frac{x}{2} + 1$ ,  $y = \frac{x}{2} - 1$ ,  $x = a - 1 - a^2$ ,  $x = a^2 - 3a + 1$ , равна 16?

$$\boxed{1 - \xi}$$

4. («Шаг в будущее», 2021, 8.4) При каких значениях параметра  $b$  площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости  $xOy$  графиками  $y = 3|x| - 5$  и  $y = |x| + b^2 + 1$ , равна 32?

$$\boxed{\xi^{\wedge} - \xi^{\wedge}}$$

5. («Шаг в будущее», 2022, 8.4) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $f(x) = a$  имеет единственное решение, если известно, что

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & \text{если } x \in [0; 5]; \\ x^2 - 2, & \text{если } x \in (-3; 0); \\ 3x + 16, & \text{если } x \in (-4; -3]? \end{cases}$$

$$\boxed{[7; 8] \cap \{1, 2, 3\} \ni 0}$$

6. («Шаг в будущее», 2020, 8.4) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\left| \frac{-4x^4 - (6a + 10)x^3 + (16 - 4a)x^2 - (6a^2 - 14a - 40)x}{(4 - x^2 - a)(3a + 2x + 5)} \right| = \sqrt{a^2 - 2a + 1}$$

имеет одно решение?

$$\boxed{1 = 0; 1 = 0; \xi = 0}$$



13. («Физтех», 2017, 9) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$

а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$$\left\{ \frac{21}{8} \right\} \cap \left( \frac{5}{91}; 7 \right) \cap \left( 7 - \frac{5}{91}; - \right) \cap \left( 9; 7 \right) \cap \left( 8 \right)$$

14. («Физтех», 2016, 9) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$a|2 - x| + \frac{x^2 - x - 6}{3 - x} = 0$$

имеет ровно одно решение.

$$\{ 5 \} \cap [ 1; 1 - )$$

15. («Физтех», 2020, 9) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\{ 7 \} \cap \{ 0 \} \cap ( 6 - ; 7 - ) \cap ( 6; 12 ]$$

16. («Физтех», 2016, 10–11) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y + 9| + |x + 2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$$[ 9; 23 + 4\sqrt{15} ]$$

17. («Физтех», 2020, 10) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$001 = a \text{ или } 4 = a$$

18. («Физтех», 2020, 10) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 64, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{2}} \right\} \cap \left( 8 \right) \cup \left( 24 \right) \cup \left( 8; 24 \right) \cup \left( -24; -8 \right) \cup \left( -24; - \right) \cap \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}} \right\} \cap \left( -8 - ; - \right) \cap \left( 8 \right) \cap \left( 12\sqrt{2} \right)$$

19. («Физтех», 2020, 11) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\boxed{\{a \in \mathbb{R}\} \ni a}$$

20. («Физтех», 2020, 11) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$$\boxed{\left\{ \left( \frac{a}{1+\sqrt{a}} \right) : a \in \mathbb{R} \right\} \ni a}$$

21. (ОММО, 2014) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $|\ln |x|| = ax$  имеет три решения.

$$\boxed{\left( \frac{a}{1} : 0 \right) \cap \left( 0 : \frac{a}{1} - \right)}$$

22. (ОММО, 2015, 11) При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\ln(x - 2a) - 3(x - 2a)^2 + 2a = 0$$

имеет единственный корень?

$$\boxed{\frac{1}{9} \in \mathbb{R}}$$

23. («Физтех», 2012) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 2x - 4y - 5, \\ x^2 + y^2 - 9a^2 \leq 8y - 14x - 61 + 12a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$$\boxed{a \in \mathbb{R}}$$

24. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся такое число  $b$ , что система

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ x^2 + y^2 + 8b^2 = 4b(y - x) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y)$ .

$$\boxed{\left( \infty : \frac{1}{1} - \sqrt{\phantom{x}} \right)}$$

25. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых найдётся число  $a$  такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y)$ .

$$\left(\infty + \frac{8}{3}\right] \cap (0; \infty -)$$

26. («Физтех», 2015, 10) Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых найдётся число  $a$  такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = \frac{9}{(x + a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y)$ .

$$[7; 11 -]$$

27. («Физтех», 2015, 11) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся число  $b$  такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = 15 \cos(x - b) - 8 \sin(x - b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y)$ .

$$[-17; 14 -]$$

28. («Физтех», 2019, 11) Окружность, центр которой лежит на прямой  $y = b$ , пересекает параболу  $y = \frac{3}{4}x^2$  хотя бы в трёх точках; одна из этих точек — начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой  $y = \frac{3}{4}x + b$ . Найдите все значения  $b$ , при которых описанная конфигурация возможна.

$$\frac{12}{25} = q$$

29. («Физтех», 2019, 11) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y \sin 2a - x \cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y \cos 3a - x \sin 3a) \end{cases}$$

существуют два решения  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$  такие, что расстояние между точками  $P(x_1; y_1)$  и  $Q(x_2; y_2)$  равно 10.

$$\mathbb{Z} \ni u \text{ or } v; \frac{5}{4\sqrt{2}} + \frac{01}{x} + \frac{5}{4\sqrt{2}} + \frac{5}{12} \text{ arcsin } \frac{5}{2} \pm \frac{01}{x} = v$$

**30.** («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) При каких значениях параметра  $a$  площадь фигуры, заданной на плоскости  $(x, y)$  системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - ay \leq 1 - \frac{5a^2}{4}, \\ y^2 + 4xy + 4x^2 \leq 25a^2, \end{cases}$$

максимальна?

$$\frac{a}{c} \leq |v|$$

**31.** («Ломоносов», 2012, 10–11) Найдите все значения  $a > 0$ , при каждом из которых из неравенства  $x^2 + y^2 \leq a$  следует неравенство  $(|x| + 4)(|y| + 4) \leq 49$ .

$$[81:0]$$

**32.** («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых для любого значения  $b$  система

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (|y - 1| - 1)^2 = 4, \\ y = b|x + 2| + a \end{cases}$$

имеет решения.

$$[\frac{a}{c} + z; \frac{a}{c} - ]$$

**33.** («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найти все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y - x| \leq a - |x - 1|, \\ (y - 4)(y + 3) \geq (4 - x)(3 + x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$L = v$$

**34.** (ОММО, 2012) При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} |x| + |y| + ||x| - |y|| = 6, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет наибольшее возможное число решений?

$$[9:8]$$

**35.** («Физтех», 2013) При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + 3y^2)(y^2 - 25) \geq 0, \\ |x + 2 + y| + |y + 2 - x| \leq a? \end{cases}$$

$$[9:7]$$

36. («Физтех», 2013) При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (3x^2 + 3xy + 2y^2) (|x + y| - 8) \geq 0, \\ x(x - 4) + y(y - 2) = a? \end{cases}$$

2/51 '0

37. («Физтех», 2010) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x + 2| - 2y = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 - 2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

2^2 + 2

38. («Физтех», 2011) Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = |b + y^2|, \\ y = a(x - b^2) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра  $a$ .

(\infty =: 1] \cap [0: \infty -)

39. («Физтех», 2009) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 17 \leq 6(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 + 2x = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

[9: 1 - 51^2] \cap [51^2 - 1: 9 -]

40. («Физтех», 2007) Найти все значения параметра  $a$ , при которых существует ровно две пары действительных чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (y + 8 - x^2) (2x + |y|) = 0, \\ 2ax - y = 8 + a^2. \end{cases}$$

\{-4, -2\} \cup [-1; 1]

41. («Ломоносов», 2015, 10–11) Найдите наибольшее значение  $x + y$ , если числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

2^2 + 1

42. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите множество значений выражения  $x - y + 1$  при условии

$$(x - y)^2 = 2|2y - x| + x + 15.$$

$$(\infty + ; 9] \cap [7 - ; \infty -)$$

43. («Физтех», 2017, 11) Найдите все значения параметра  $b$  такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a - 2 \leq 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра  $a$ .

$$(\infty + ; 0] \cap [0] \cap [-7 ; \infty -)$$

44. («Физтех», 2017, 11) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых существует значение параметра  $b$  такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{a - y}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{4 - x}{4}\right), \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\left(\frac{\pi}{2\pi} ; \frac{\pi}{\pi}\right)$$

45. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все отрицательные  $a$ , при которых уравнение

$$\frac{6\pi a - \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) - ax}{\operatorname{tg}^2 x + 4} = 0$$

имеет ровно три решения, принадлежащих множеству  $[\pi; +\infty)$ .

$$\frac{\pi}{\pi} - ; \frac{\pi}{\pi} - ; \frac{\pi}{\pi} -$$

46. (МГУ, ф-т психологии, 2004) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$$

имеет ровно три различных решения.

$$1 ; 0$$

47. («Физтех», 2016, 11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |9 + 8y - x^2 - y^2| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2, \\ (a + 4)x - 13y + a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости  $(x, y)$  множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

$$12 + 25\pi - 25 \arcsin \frac{5}{13}; (6) ; -6, -3$$

48. («Физтех», 2016, 11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости  $(x, y)$  множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

78 '98- (9 '09 (a