Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Чтение графика функции

Напомним определение числовой функции.

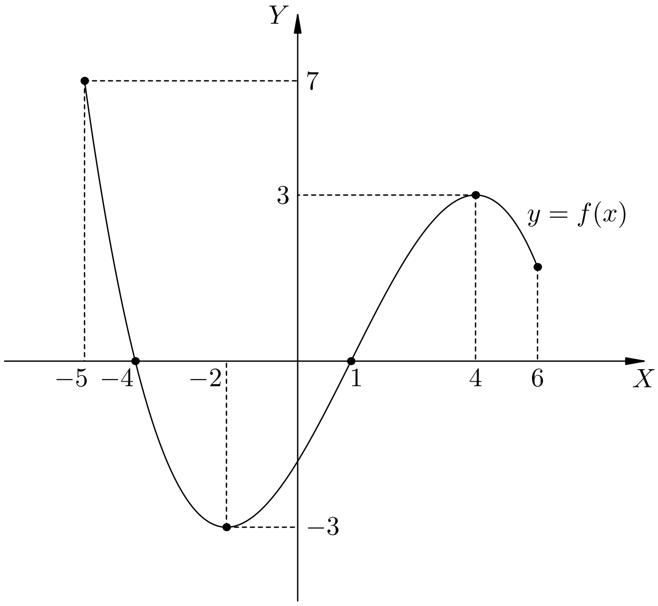
Числовая функция $y = f(x)$, определённая на множестве $A \subset R$ — это правило, сопоставляющее каждому значению $x \in A$ одно-единственное число y.

Множество A называется *областью определения* функции и обозначается $D(y)$ или $D(f)$.

Когда переменная x пробегает область определения, переменная y также пробегает некоторое множество, которое называется *множеством значений* или *областью значений* функции. Область значений обозначается $E(y)$ или $E(f)$.

В этой небольшой статье мы расскажем вам, что мы видим на графике функции и как это называется в математике. Мы проиллюстрируем понятия области определения, области значений, возрастания и убывания функции. Покажем, что такое точка экстремума, экстремум, наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.



Область определения функции — это диапазон всех возможных «иксов». Мы видим, что в данном случае $D(y) = [-5; 6]$.

Область значений функции— это диапазон соответствующих «игреков»: $E(y) = [-3; 7]$.

Нули функции — это значения аргумента x, при которых функция обращается в нуль. Другими словами, это абсциссы точек, в которых график пересекает ось X. В нашем случае нулями функции являются $x = -4$ и $x = 1$.

Важнейшие понятия — возрастание и убывание функции на некотором множестве M.

В качестве множества M может выступать что угодно: отрезок $[a, b]$; конечный или бесконечный промежуток, открытый с одного или с обоих концов; объединение промежутков и т. д.

Функция называется возрастающей на множестве M, если для любых $x_1, x_2 \in M$, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Попросту говоря, большему значению аргумента отвечает большее значение функции. График возрастающей функции идёт вправо вверх.

Функция называется убывающей на множестве M, если для любых $x_1, x_2 \in M$, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Иными словами, большему значению аргумента отвечает меньшее значение функции. График убывающей функции идёт вправо вниз.

Функция, которую мы рассматриваем, возрастает на отрезке $[-2; 4]$. Функция убывает на каждом из отрезков $[-5; -2]$ и $[4; 6]$.

Хороший вопрос: верно ли, что наша функция убывает на множестве $[-5; -2] \cup [4; 6]$? Ответ: неверно. Почему?

Точка $x = 4$ на нашем рисунке является *точкой максимума*. Точка максимума — это внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней больше, чем во всех *достаточно близких* к ней точках. Можно сказать, что точка максимума соответствует локальному пику графика функции.

Обратите внимание, что граничная точка $x = -5$ не является точкой максимума. Она не лежит внутри области определения, у неё нет соседей слева.

Точка $x = -2$ является *точкой минимума*. Точка минимума — это внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках. Точка минимума отвечает локальной «ямке» на графике функции.

Точки максимума и минимума вместе называются *точками экстремума* функции. В нашем случае $x = -2$ и $x = 4$ — точки экстремума.

При этом *экстремумы* функции — это значения функции в точках экстремума. Мы видим, что $f(-2) = -3$ и $f(4) = 3$. Стало быть, экстремумы функции — это числа -3 и 3. Значение -3 является *минимумом* функции, значение 3 — её *максимумом*.

Иногда в задачах требуется отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке. Они не обязательно совпадают с экстремумами! Например, наименьшее значение нашей функции на отрезке $[-5; 6]$ равно -3 и совпадает с минимумом функции. А вот наибольшее значение функции на этом отрезке равно 7; оно достигается на левом конце отрезка и не совпадает с максимумом функции.

Но в любом случае наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке достигаются либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

Понятие *непрерывной* функции, кстати, является одним из важнейших в математике. Строгое определение непрерывности вы узнаете на первом курсе при изучении математического анализа. Но смысл прост: график непрерывной функции можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.