Геометрические задачи на экстремум

1. (*«Физтех», 2012.3*) Рассматриваются всевозможные правильные треугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

а) $\frac{2a^3}{3}$; б) 120°

2. (*«Физтех», 2012.3*) Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

а) $\frac{8a^3}{9\sqrt{3}}$; б) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$

3. (*«Физтех», 2012.3*) Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

а) $\frac{4a^3}{9\sqrt{3}}$; б) 120°

4. (*«Физтех», 2012.3*) Рассматриваются всевозможные правильные шестиугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

а) $\frac{a^3}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$

5. (*МФТИ, 2008.6*) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 3$, $SC = 8$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN = MC = 4MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найдите объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

$\frac{32}{\sqrt{63}}$; $\frac{\sqrt{206451}}{31}$

6. (*МФТИ, 2008.6*) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 3$, $BC = 2$. Пусть N — середина SB, M — середина SC, причём $BN = MC = 3MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найдите объём пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

$\frac{18}{\sqrt{35}}$; $\frac{\sqrt{29435}}{17}$

7. (*МФТИ, 2001.5*) Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $S \neq A$, $AB = BS$. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF, где $P \in BC$, $BP = \frac{1}{3}BC$

8. (*«Ломоносов», 2011.3*) Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания 16 и боковым ребром 15?

$8\sqrt{2}$

9. (*«Ломоносов», 2015.5*) Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1 : 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

$2\sqrt{7}$

10. (*«Ломоносов», 2015.7*) Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2\arcsin\frac{1}{3}$?

$5\sqrt{23}$

11. (*«Ломоносов», 2016.7*) Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные рёбра попарно равны, а сумма длин всех рёбер равна $36\sqrt{2}$.

72

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012.4*) Найдите максимально возможное отношение объёма конуса к объёму шара, содержащего этот конус.

$\frac{8}{27}$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016.5*) Боковые рёбра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

27

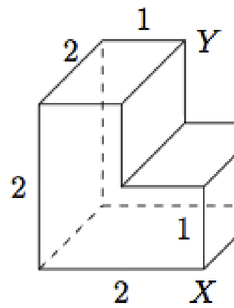
14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014.5*) Одно основание правильной n-угольной призмы ($n \geqslant 3$) имеет n общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объём призмы?

$0 < V \leqslant 16n\sin\frac{2\pi}{n}$ при фиксированном n; $0 < V < 32\pi$ при произвольном n

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012.5*) Высота правильной треугольной пирамиды, проведённая из вершины основания к противоположной боковой грани, равна 4. Какие значения может принимать площадь полной поверхности такой пирамиды?

$\left[\frac{64}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

16. (*ОММО, 2011.9*) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?



17. (*ОММО, 2014.10*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения — плоскостью, проходящей через диагональ A_1C, и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

$\boxed{194}$

18. (*ОММО, 2017.10*) В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

$\boxed{\frac{10\sqrt{6}}{9}}$

19. (*ОММО, 2018.10*) Точки M, N и K расположены на боковых рёбрах AA_1, BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объёма пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 16.

$\boxed{4}$

20. (*«Курчатов», 2015, 11.6*) Для приготовления картофельного пюре повару Коле надо как можно быстрее получить заданный объём очищенной картошки. Не заботясь об экономии очисток, он из шарообразных картофелин вырезает кубики, каждым взмахом ножа очищая по одной грани. Может ли он справиться с заданием быстрее при той же частоте взмахов ножа, если будет вырезать какие-нибудь другие многогранники? (Формально: верно ли, что из всех многогранников, вырезаемых из данного шара, наибольшее отношение объема к числу граней — у вписанного куба?)

$\boxed{\text{Может}}$

21. (*«Высшая проба», 2016, 11.5*) Два коридора высотой и шириной в 1 м идут перпендикулярно друг другу по первому и второму этажу здания. Разделяющее их перекрытие разобрано, образуя дыру 1×1 м в полу одного и в потолке другого. Какова максимальная длина балки, которую можно передать из одного коридора в другой через дыру? (Балку считать негнущимся отрезком нулевой толщины. Толщина перекрытия также равна нулю, т. е. пол верхнего коридора и потолок нижнего коридора находятся в одной плоскости.)

$\boxed{\frac{1}{2}\left(2+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$