

Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 9 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 9 классе.

Третий этап (региональный) и четвёртый этап (заключительный) проводятся в два дня; задачи 1, 2, 3, 4 предлагаются в первый день, задачи 5, 6, 7, 8 — во второй. Задачи внутри варианта расположены обычно по возрастанию сложности.

В 2017/18 году на региональном этапе предлагалось по пять задач в каждый из двух дней. Соответственно, задачи первого дня регионального этапа имеют номера с 1 по 5, второго — с 6 по 10. Заключительный этап проводился по старой схеме: по четыре задачи в каждый из двух дней.

Принцип нумерации задач листка: задача **16.3.8** предлагалась в 2015/16 учебном году на третьем (региональном) этапе под номером 8.

20.1.5. На стороне AD квадрата $ABCD$ отметили точку K , а на продолжении луча AB за точку B — точку L . Известно, что $\angle LKC = 45^\circ$, $AK = 1$, $KD = 2$. Найдите LB .

$\boxed{7 = 87}$

19.1.2. Радиус описанной окружности равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен основанию AC . На основании AC построен квадрат $AKLC$ так, что отрезок KL пересекает боковые стороны треугольника. Докажите, что треугольник BKL равносторонний.

19.2.3. Придумайте, как разрезать контур квадрата со стороной 1 на четыре части и сложить из этих частей контур треугольника. Найдите площадь получившегося у вас треугольника. (*Толщины контур не имеет. Сгибать и разгибать части нельзя.*)

19.2.6. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана BM . Точки P и Q — центры вписанных окружностей треугольников ABM и CBM соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABP и CBQ лежит на отрезке BM .

19.3.4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω , описанной около треугольника B_1HC_1 , лежит на прямой BC . Докажите, что окружность Γ , описанная около треугольника ABC , касается окружности ω .

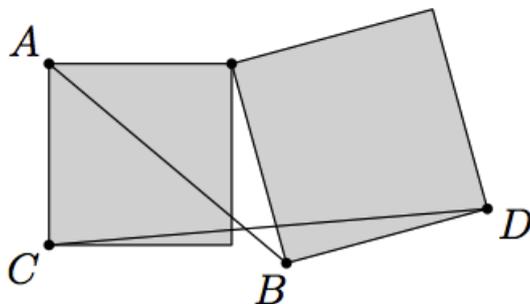
19.3.8. Дан треугольник ABC . На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D , лежащая внутри угла BAC , такая, что $\angle BCD = 60^\circ$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M — середина отрезка BD . Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный.

19.4.3. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC , в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H . На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO , пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E . Докажите, что $BH = DE$.

19.4.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D . На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD , выбрана точка K .

Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A , в точке T . Пусть M — середина отрезка DT . Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

18.1.4. Два квадрата имеют общую вершину. Найдите отношение отрезков AB и CD , показанных на рисунке.



$\zeta^{\wedge} : 1$

18.2.3. В треугольнике ABC проведены высота BH и медианы AM и CK . Докажите, что треугольники KHM и ABC подобны.

18.2.5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Рассматривают точки Q и P на боковых сторонах AB и CD соответственно, для которых $CP = AQ$. Докажите, что середины всех таких отрезков PQ лежат на одной прямой.

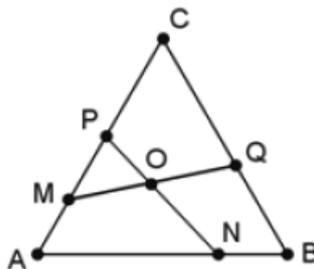
18.3.3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC . Найдите угол DME .

18.3.9. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X , а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y . Прямая ℓ проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY . Докажите, что ℓ касается ω .

18.4.2. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC . Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B , а также касается ω в точке L , лежащей на стороне BC . Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

18.4.8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN , а H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

17.1.5. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P, Q расположены так, как показано на рисунке. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Найдите величину угла NOQ .



◻09

17.2.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на прямую DE из точек A и C соответственно. Докажите, что $ME = DN$.

17.2.6. Высоты неравностороннего остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . O — центр описанной окружности треугольника BHC . Центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке OA . Найдите угол BAC .

◻09

17.3.4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω . На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω . Окружность Ω_b с центром P проходит через вершину B , а окружность Ω_c с центром Q — через C . Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку.

17.3.6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH . Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM , пересекает луч HB в точке K . Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$.

17.4.2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Окружность ω проходит через вершины B и C и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C , пересекает луч AD в точке Z . Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

17.4.7. Неравносторонний треугольник ABC , в котором $\angle ACB = 60^\circ$, вписан в окружность Ω . На биссектрисе угла BAC выбрана точка A' , а на биссектрисе угла ABC — точка B' так, что $AB' \parallel BC$ и $BA' \parallel AC$. Прямая $A'B'$ пересекает Ω в точках D и E . Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.

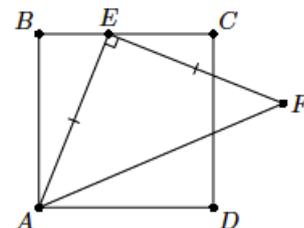
16.1.5. В треугольнике ABC медиана, выходящая из вершины A , перпендикулярна биссектрисе угла B , а медиана, выходящая из вершины B , перпендикулярна биссектрисе угла A . Известно, что сторона $AB = 1$. Найдите периметр треугольника ABC .

◻

16.2.3. В треугольник ABC вписана окружность с центром O . На стороне AB выбрана точка P , а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что $\angle BOP = \angle COQ$.

16.2.5. Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF = 90^\circ$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC (см. рисунок). Найдите угол DCF .

45



16.3.2. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC$. В окружности Ω , описанной около треугольника ABC , проведён диаметр CC' . Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC , пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$.

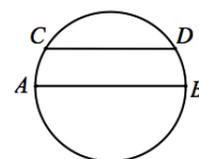
16.3.8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90^\circ$. Пусть M — середина стороны BC . Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

16.4.2. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C . Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q . Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

16.4.7. Окружность ω вписана в треугольник ABC , в котором $AB < AC$. Внеписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A' . Точка X выбирается на отрезке $A'B$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω . Касательные, проведённые из X к ω , пересекают отрезок BC в точках Y и Z . Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X .

15.1.5. В окружности провели диаметр AB и параллельную ему хорду CD так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности (см. рисунок). Найдите угол CAB .

30



15.2.3. Дан треугольник ABC . Прямая, параллельная AC , пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM — в точке Q . Известно, что $PQ = 3$, а $QT = 5$. Найдите длину AC .

11 = 20

15.2.5. Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

15.3.4. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой AC . Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

15.3.6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB , пересекает вторично сторону BC в точке L . Докажите, что $CB + CL = AB$.

15.4.2. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω , описанной около треугольника ABC , так, что касательные к ω в этих точках проходят через D . Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC .

◦09

15.4.7. Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность Ω . Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A' . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB .

14.1.2. Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



8 : 9

14.2.3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O , которая касается стороны AB в точке E . На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = AC/2$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

14.2.5. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Окружность, описанная около треугольника AH , пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG , если $DE = 5$ см.

10 см

14.3.2. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC , DBC , ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$.

14.3.7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B , D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?

◦06

14.4.4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC . Касательные к Ω , проведённые в точках A и C , пересекаются в точке P . Отрезки BP и AC пересекаются в точке S . Пусть AD — высота треугольника ABP . Окружность ω , описанная около треугольника CSD , пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.

14.4.6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω . Окружность ω проходит через точки C , D и пересекает отрезки CA , CB в точках A_1 , B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A , B , A_2 и B_2 лежат на одной окружности.