Геометрия на ММО. 9 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 9 классе.

Принцип нумерации задач: номер **16.2** означает, что задача предлагалась в 2016 году под номером 2 (чем больше номер задачи, тем она обычно сложнее).

20.2. Из шести палочек попарно различной длины сложены два треугольника (по три палочки в каждом). Всегда ли можно сложить из них один треугольник, стороны которого состоят из одной, двух и трех палочек соответственно?

18.2. Даны четыре палочки. Оказалось, что из любых трёх из них можно сложить треугольник, при этом площади всех четырёх треугольников равны. Обязательно ли все палочки одинаковой длины?

16.2. В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

13.2. В треугольнике ABC, где угол B прямой, а угол A меньше угла C, проведена медиана BM. На стороне AC взята точка L так, что $\angle ABM = \angle MBL$. Описанная окружность треугольника BML пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что $AN = BL$.

10.2. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведён перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB.

09.2. Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении $2 : 1$.

19.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO.

12.3. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

11.3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен $30°$. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны.

08.3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около этого треугольника окружности, D — такая точка на стороне AC, что $AD = AB$. Докажите, что прямые AO и LD перпендикулярны.

06.3. Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены равные прямоугольники $ABMN$ и $LBCK$ так, что $AB = KC$. Докажите, что прямые AL, NK и MC пересекаются в одной точке.

20.4. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

18.4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P, отличная от A и D. Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P.

16.4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает сторону BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.

15.4. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.

14.4. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, её размеры могут отличаться от размеров стола.)

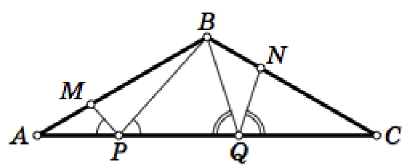
19.5. Биссектриса угла ABC пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точках B и L. Точка M — середина отрезка AC. На дуге ABC окружности ω выбрана точка E так, что$EM \parallel BL$. Прямые AB и BC пересекают прямую EL в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PE = EQ$.

13.5. Назовём точку на плоскости *узлом*, если обе её координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника.

12.5. Дан треугольник ABC. Прямая l касается вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC.

11.5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K. Точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

09.5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен $120°$. Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом $60°$ друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q, попали на боковые стороны в точки M и N (см. рисунок). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ.



17.6. В треугольнике ABC с углом A, равным $45°$, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$.

07.6. Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами $120°$. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.