

## Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 8 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 8 классе.

Формально Всероссийская олимпиада по математике для восьмиклассников имеет два этапа: первый (школьный) и второй (муниципальный). Роль третьего и четвёртого этапов играют соответственно региональный и заключительный этапы олимпиады им. Леонарда Эйлера.

Третий и четвёртый этапы проводятся (каждый) в два дня; задачи 1, 2, 3, 4 предлагаются в первый день, задачи 5, 6, 7, 8 — во второй. Задачи внутри варианта расположены обычно по возрастанию сложности.

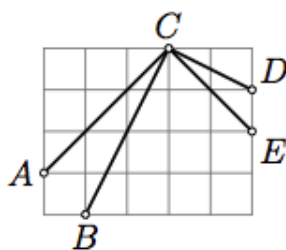
В 2017/18 году на региональном этапе (как олимпиады Эйлера, так и Всероссийской олимпиады) предлагалось по пять задач в каждый из двух дней. Соответственно, задачи первого дня регионального этапа имеют номера с 1 по 5, второго — с 6 по 10. Заключительный этап (как олимпиады Эйлера, так и Всероссийской олимпиады) проводился по старой схеме: по четыре задачи в каждый из двух дней.

В данном листке задачи нумеруются по принципу «Номер года. Номер этапа. Номер задачи в варианте». Например:

- задача **16.2.3** предлагалась в 2015/16 учебном году на втором (муниципальном) этапе Всероссийской олимпиады под номером 3;
- задача **16.3.8** предлагалась в том же учебном году на региональном этапе олимпиады им. Леонарда Эйлера под номером 8.

В листок включены все задачи школьных и муниципальных этапов начиная с 2012/13 учебного года, а также все задачи региональных и заключительных этапов олимпиады им. Леонарда Эйлера (начиная с самой первой олимпиады 2009 года).

**20.1.4.** На клетчатой бумаге отмечены точки  $A, B, C, D, E$ , как на рисунке справа. Докажите, что  $\angle ACB = \angle DCE$ .



**19.1.6.** Выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  таков, что  $\angle BAC = \angle BDA$  и  $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$ . Найдите длину  $AD$ , если известно, что  $AB = 14$ ,  $CD = 6$ .

□

**19.2.3.** Высота  $CH$ , опущенная из вершины прямого угла треугольника  $ABC$ , делит биссектрису  $BL$  этого треугольника пополам. Найдите угол  $BAC$ .

□

**19.2.6.** Внутри острого угла расположен выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Оказалось, что для каждой из двух прямых, содержащих стороны угла, выполняется условие: сумма расстояний от вершин  $A$  и  $C$  до этой прямой равна сумме расстояний от вершин  $B$  и  $D$  до этой же прямой. Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

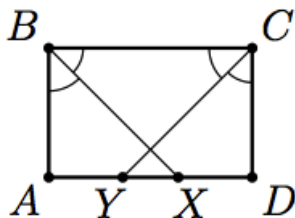
**19.3.5.** Периметр треугольника  $ABC$  равен 2. На стороне  $AC$  отмечена точка  $P$ , а на отрезке  $CP$  — точка  $Q$  так, что  $2AP = AB$  и  $2QC = BC$ . Докажите, что периметр треугольника  $BPQ$  больше 1.

**19.3.8.** Точка  $N$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ , в котором  $\angle ACB = 60^\circ$ . Точка  $M$  на стороне  $AC$  такова, что  $AM = BN$ . Точка  $K$  — середина отрезка  $BM$ . Докажите, что  $AK = KC$ .

**19.4.4.** Дан выпуклый четырёхугольник  $ABSC$ . На диагонали  $BC$  выбрана точка  $P$  так, что  $AP = CP > BP$ . Точка  $Q$  симметрична точке  $P$  относительно середины диагонали  $BC$ , а точка  $R$  симметрична точке  $Q$  относительно прямой  $AC$ . Оказалось, что  $\angle SAB = \angle QAC$  и  $\angle SBC = \angle BAC$ . Докажите, что  $SA = SR$ .

**19.4.6.** Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно треугольника  $ABC$ . На продолжении отрезка  $CM$  за точку  $M$  отмечена точка  $D$ . Оказалось, что  $BC = BD = 2$  и  $AN = 3$ . Докажите, что  $\angle ADC = 90^\circ$ .

**18.1.2.** В прямоугольнике  $ABCD$  сторона  $AB$  равна 6, сторона  $BC$  равна 11. Из вершин  $B$  и  $C$  проведены биссектрисы углов, пересекающие сторону  $AD$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Найдите длину отрезка  $XY$ .



□

**18.1.6.** В треугольнике  $ABC$  провели медиану  $AM$ . Найдите угол  $AMC$ , если углы  $BAC$  и  $BCA$  равны  $45^\circ$  и  $30^\circ$  соответственно.

□135°

**18.2.4.** В трапеции  $ABCD$  точка  $M$  — середина боковой стороны  $CD$ . Лучи  $BD$  и  $BM$  делят угол  $ABC$  на три равные части. Диагональ  $AC$  является биссектрисой угла  $BAD$ . Найдите углы трапеции.

□ $\angle A = 72^\circ, \angle C = 54^\circ$

**18.2.6.** Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$  четырёхугольника  $ABCD$ . Известно, что  $\angle B = 150^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$  и  $AB = CD$ . Найдите угол между прямыми  $MN$  и  $BC$ .

□09

**18.3.4.** Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $E$  так, что  $AE = DE$  и  $\angle ABE = 90^\circ$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $BC$ . Найдите угол  $DME$ .

**18.3.8.** На биссектрисе  $AL$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ . Известно, что  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $\angle ADC = 3\alpha$ ,  $\angle ACB = 4\alpha$ . Докажите, что  $BC + CD = AB$ .

**18.4.3.** Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  равны и пересекаются в точке  $K$ . Внутри треугольников  $AKD$  и  $BKC$  выбрали точки  $P$  и  $Q$  соответственно так, что

$$\angle KAP = \angle KDP = \angle KBQ = \angle KCQ.$$

Докажите, что прямая  $PQ$  параллельна биссектрисе угла  $AKD$ .

**18.4.8.** Вершина  $F$  параллелограмма  $ACEF$  лежит на стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ . Известно, что  $AC = AD$  и  $AE = 2CD$ . Докажите, что  $\angle CDE = \angle BEF$ .

**17.1.5.** Незнайка измерил длины сторон и диагоналей своего четырёхугольного земельного участка, записал в блокнот результаты шести измерений и тут же забыл, какие числа относились к диагоналям, а какие — к сторонам. Потом он заметил, что среди написанных чисел есть четыре одинаковых, а два оставшихся числа тоже равны между собой. Незнайка обрадовался и сделал вывод, что его участок — квадрат. Обязательно ли это так? Если ответ «да», то утверждение нужно доказать, если ответ «нет» — привести опровергающий пример и его обосновать.

**17.2.3.** Точки пересечения графиков четырех функций, заданных формулами  $y = kx + b$ ,  $y = kx - b$ ,  $y = mx + b$  и  $y = mx - b$ , являются вершинами четырёхугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

**17.2.5.** В прямоугольнике  $ABCD$  на диагонали  $AC$  отмечена точка  $K$  так, что  $CK = BC$ . На стороне  $BC$  отмечена точка  $M$  так, что  $KM = CM$ . Докажите, что  $AK + BM = CM$ .

**17.3.3.** На боковых сторонах  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  соответственно так, что  $PQ \parallel BC$ . На биссектрисах треугольников  $ABC$  и  $APQ$ , исходящих из вершин  $B$  и  $Q$ , выбраны точки  $X$  и  $Y$  соответственно так, что  $XY \parallel BC$ . Докажите, что  $PX = CY$ .

**17.3.6.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  биссектриса угла  $B$  проходит через середину стороны  $AD$ , а  $\angle C = \angle A + \angle D$ . Найдите угол  $ACD$ .

**17.4.3** Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Известно, что  $AB = BC = CD = DE = 1$ . Докажите, что  $AD < 2$ .

**17.4.6** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $A$  и  $C$  равны  $100^\circ$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $X$  и  $Y$  соответственно так, что  $AX = CY$ . Оказалось, что прямая  $YD$  параллельна биссектрисе угла  $ABC$ . Найдите угол  $AXY$ .

**16.1.5.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AB$  на стороне  $CB$  выбрана точка  $D$  так, что  $CD = AC - AB$ . Точка  $M$  — середина  $AD$ . Докажите, что угол  $BMC$  — тупой.

**16.2.3.**  $ABCD$  — выпуклый четырёхугольник. Известно, что  $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ$ ,  $\angle CAB = 60^\circ$ ,  $\angle CBD = 20^\circ$ . Найдите угол  $CDB$ .

08

**16.2.5.** Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  отмечена произвольная точка  $M$ . Докажите, что можно выбрать на стороне  $AB$  точку  $C_1$ , на стороне  $BC$  — точку  $A_1$ , а на стороне  $AC$  — точку  $B_1$  таким образом, чтобы длины сторон треугольника  $A_1B_1C_1$  были равны отрезкам  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$ .

**16.3.3.** В трапеции  $ABCD$  точка  $M$  — середина основания  $AD$ . Известно, что  $\angle ABD = 90^\circ$  и  $BC = CD$ . На отрезке  $BD$  выбрана точка  $F$  такая, что  $\angle BCF = 90^\circ$ . Докажите, что  $MF \perp CD$ .

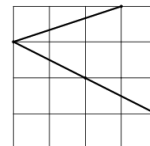
**16.3.8.** Точки  $M$  и  $N$  — середины биссектрис  $AK$  и  $CL$  треугольника  $ABC$  соответственно. Докажите, что угол  $ABC$  прямой тогда и только тогда, когда  $\angle MBN = 45^\circ$ .

**16.4.3.** Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Точка  $D$  выбрана на продолжении стороны  $AB$  за точку  $A$ , точка  $E$  — на продолжении  $BC$  за точку  $C$ , а точка  $F$  — на продолжении  $AC$  за точку  $C$  так, что  $CF = AD$  и  $AC + EF = DE$ . Найдите угол  $BDE$ .

09

**16.4.8.** Дан параллелограмм  $ABCD$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  и продолжении стороны  $CD$  за точку  $D$  выбраны соответственно точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  так, что треугольники  $KLM$  и  $BCA$  равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок  $KM$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $N$ . Докажите, что  $LN \parallel AB$ .

**15.1.5.** На стандартном тетрадном листе в клетку нарисован угол (см. рисунок). Найдите его величину, не используя измерительные инструменты. Ответ обоснуйте.



45°

**15.2.3.** Вершину  $A$  параллелограмма  $ABCD$  соединили отрезками с серединами сторон  $BC$  и  $CD$ . Один из этих отрезков оказался вдвое длиннее другого. Определите, каким является угол  $BAD$ : острым, прямым или тупым.

Угол  $BAD$  тупой

**15.2.5.** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $120^\circ$ ,  $AB = 2BC$ . Серединный перпендикуляр к стороне  $AB$  пересекает  $AC$  в точке  $D$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

2 : 3

**15.3.4.** Серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам  $AB$  и  $BC$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ , пересекают стороны  $CD$  и  $DA$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Оказалось, что  $\angle APB = \angle BQC$ . Внутри четырёхугольника выбрана точка  $X$  такая, что  $QX \parallel AB$  и  $PX \parallel BC$ . Докажите, что прямая  $BX$  делит диагональ  $AC$  пополам.

**15.3.7.** В трапеции  $ABCD$ , где  $AD \parallel BC$ , угол  $B$  равен сумме углов  $A$  и  $D$ . На продолжении отрезка  $CD$  за вершину  $D$  отложен отрезок  $DK = BC$ . Докажите, что  $AK = BK$ .

**15.4.2.** В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  больше стороны  $BC$ . На продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  отметили точку  $N$  так, что  $2BN = AB + BC$ . Пусть  $BS$  — биссектриса треугольника  $ABC$ ,  $M$  — середина стороны  $AC$ , а  $L$  — такая точка на отрезке  $BS$ , что  $ML \parallel AB$ . Докажите, что  $2LN = AC$ .

**15.4.8.**  $CK$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . На сторонах  $BC$  и  $AC$  выбраны точки  $L$  и  $T$  соответственно такие, что  $CT = BL$  и  $TL = BK$ . Докажите, что треугольник с вершинами в точках  $C$ ,  $L$  и  $T$  подобен исходному.

**14.1.2.** Каково отношение площади закрашенной части к белой (вершины всех квадратов за исключением самого большого находятся в серединах соответствующих сторон)?



□ 8 : 9

**14.2.3.** В параллелограмме  $ABCD$  из вершины тупого угла  $B$  проведены высоты  $BM$  и  $BN$ , а из вершины  $D$  — высоты  $DP$  и  $DQ$ . Докажите, что точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  являются вершинами прямоугольника.

**14.2.5.** На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно так, что  $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$ . Найдите  $\angle AKD$ .

□ 10

**14.3.4.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$  такая, что  $BD = AC$ . Медиана  $AM$  этого треугольника пересекает отрезок  $BD$  в точке  $K$ . Оказалось, что  $DK = DC$ . Докажите, что  $AM + KM = AB$ .

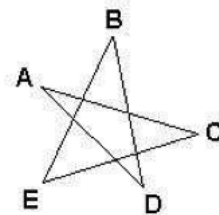
**14.3.6.** Дан выпуклый пятиугольник  $ABCDE$ , причём прямая  $BE$  параллельна прямой  $CD$  и отрезок  $BE$  короче отрезка  $CD$ . Внутри пятиугольника выбраны точки  $F$  и  $G$  таким образом, что  $ABCF$  и  $AGDE$  — параллелограммы. Докажите, что  $CD = BE + FG$ .

**14.4.2.** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  с углом в  $100^\circ$  при вершине  $C$  взяты точки  $P$  и  $Q$  такие, что  $AP = BC$  и  $BQ = AC$ . Пусть  $M$ ,  $N$ ,  $K$  — середины отрезков  $AB$ ,  $CP$ ,  $CQ$  соответственно. Найдите угол  $NMK$ .

□ 11

**14.4.8.** Диагональ выпуклого 101-угольника будем называть *главной*, если по одну сторону от неё лежит 50, а по другую — 49 вершин. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма длин этих диагоналей меньше суммы длин остальных главных диагоналей.

**13.1.4.** В пятиугольной звезде, изображённой на рисунке,  $\angle ACE = \angle ADB$  и  $\angle DBE = \angle BEC$ . Известно также, что  $BD = CE$ . Докажите, что  $\angle ACD = \angle ADC$ .



**13.2.4.** В трапеции  $ABCD$  основание  $BC$  в два раза меньше основания  $AD$ . Из вершины  $D$  опущен перпендикуляр  $DE$  на сторону  $AB$ . Докажите, что  $CE = CD$ .

**13.2.6.** Точка  $K$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . На катетах  $AC$  и  $BC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что угол  $MKN$  — прямой. Докажите, что из отрезков  $AM$ ,  $BN$  и  $MN$  можно составить прямоугольный треугольник.

**13.3.3.** На отрезке  $AB$  отмечена точка  $M$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $AM$  и  $BM$  соответственно, точка  $O$  — середина отрезка  $PQ$ . Выберем точку  $C$  так, чтобы угол  $ACB$  был прямым. Пусть  $MD$  и  $ME$  — перпендикуляры, опущенные из точки  $M$  на прямые  $CA$  и  $CB$ , а  $F$  — середина отрезка  $DE$ . Докажите, что длина отрезка  $OF$  не зависит от выбора точки  $C$ .

**13.3.6.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Высота  $AA_1$  продолжена за вершину  $A$  на отрезок  $AA_2 = BC$ . Высота  $CC_1$  продолжена за вершину  $C$  на отрезок  $CC_2 = AB$ . Найдите углы треугольника  $A_2BC_2$ .

◻<sub>90°, 45°, 45°</sub>

**13.4.3.** Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  равны и пересекаются в точке  $O$ . Точка  $P$  внутри треугольника  $AOD$  такова, что  $CD \parallel BP$  и  $AB \parallel CP$ . Докажите, что точка  $P$  лежит на биссектрисе угла  $AOD$ .

**13.4.6.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$ , в котором  $AB = CD$ , на сторонах  $AB$  и  $CD$  выбраны точки  $K$  и  $M$  соответственно. Оказалось, что  $AM = KC$ ,  $BM = KD$ . Докажите, что угол между прямыми  $AB$  и  $KM$  равен углу между прямыми  $KM$  и  $CD$ .

**12.3.2.** Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  такова, что угол  $ABD$  прямой и  $BC + CD = AD$ . Найдите отношение оснований  $AD : BC$ .

◻<sub>2</sub>

**12.3.8.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $ABC$  и  $ADC$  прямые. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  взяты точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно так, что  $KLMN$  — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали  $AC$  равноудалена от прямых  $KL$  и  $MN$ .

**12.4.1.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  таким образом, что серединный перпендикуляр к отрезку  $AD$  проходит через центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через вершину треугольника  $ABC$ .

**12.4.4.** Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?

◻<sub>вГ</sub>

**12.4.7.** Углы треугольника  $ABC$  удовлетворяют условию  $2\angle A + \angle B = \angle C$ . Внутри этого треугольника на биссектрисе угла  $A$  выбрана точка  $K$  такая, что  $BK = BC$ . Докажите, что  $\angle KBC = 2\angle KBA$ .

**11.3.3.** Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  такой, что  $AD = AB + CD$ . Оказалось, что биссектриса угла  $A$  проходит через середину стороны  $BC$ . Докажите, что биссектриса угла  $D$  также проходит через середину  $BC$ .

**11.3.8.** В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. На медиане  $BM$  выбрана точка  $P$ , не лежащая на  $CN$ . Оказалось, что  $PC = 2PN$ . Докажите, что  $AP = BC$ .

**11.4.4.** Внутри выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ , в котором  $AB = CD$ , выбрана точка  $P$  таким образом, что сумма углов  $PBA$  и  $PCD$  равна  $180^\circ$ . Докажите, что  $PB + PC < AD$ .

**11.4.6.** Выпуклый пятиугольник  $ABCDE$  таков, что  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $AC \parallel DE$ ,  $CE \perp BC$ . Докажите, что  $EC$  — биссектриса угла  $BED$ .

**10.3.3.** На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $K$  так, что  $AB = AK$ . Отрезок  $AK$  пересекает биссектрису  $CL$  в её середине. Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .

$$\angle B = 54^\circ, \angle C = 36^\circ$$

**10.3.8.** Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , а биссектрисы углов  $B$  и  $D$  — в точке  $Q$ , отличной от  $P$ . Докажите, что если отрезок  $PQ$  параллелен основанию  $AD$ , то трапеция равнобокая.

**10.4.3.** В четырёхугольнике  $ABCD$  сторона  $AB$  равна диагонали  $AC$  и перпендикулярна стороне  $AD$ , а диагональ  $AC$  перпендикулярна стороне  $CD$ . На стороне  $AD$  взята точка  $K$  такая, что  $AC = AK$ . Биссектриса угла  $ADC$  пересекает  $BK$  в точке  $M$ . Найдите угол  $ACM$ .

$$45^\circ$$

**10.4.6.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $B$  и  $D$  равны,  $CD = 4BC$ , а биссектриса угла  $A$  проходит через середину стороны  $CD$ . Чему может быть равно отношение  $AD : AB$ ?

$$2 : 3$$

**09.3.2.** Точка  $K$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного равнобедренного треугольника  $ABC$ . Точки  $L$  и  $M$  выбраны на катетах  $BC$  и  $AC$  соответственно так, что  $BL = CM$ . Докажите, что треугольник  $LMK$  — также прямоугольный равнобедренный.

**09.3.7.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  некоторая точка диагонали  $AC$  принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам  $AB$  и  $CD$ , а некоторая точка диагонали  $BD$  принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам  $AD$  и  $BC$ . Докажите, что  $ABCD$  — прямоугольник.

**09.4.3.** В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB$  и  $BC$  равны. Точка  $D$  внутри треугольника такова, что угол  $ADC$  вдвое больше угла  $ABC$ . Докажите, что удвоенное расстояние от точки  $B$  до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом  $ADC$ , равно  $AD + DC$ .

**09.4.6.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  выполнены соотношения  $AB = BD$ ;  $\angle ABD = \angle DBC$ . На диагонали  $BD$  нашлась точка  $K$  такая, что  $BK = BC$ . Докажите, что  $\angle KAD = \angle KCD$ .