

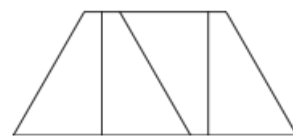
Геометрия—7. Разное

Данный листок содержит разные задачи по геометрии, которые предлагались на различных олимпиадах в 7 классе (или в которых достаточно знаний 7 класса).

1. (*Математический праздник, 1990, 6–7.2*) Изобразите множество середин всех отрезков, концы которых лежат а) на данной полуокружности; б) на диагоналях данного квадрата.

2. (*«Курчатов», 2018, 7.3*) На сторонах AB , BC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AY = AB$ и $CX = CB$. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC , пересекает прямую, проходящую через вершину C параллельно стороне AB , в точке D . Докажите, что $DX = DY$.

3. (*Математический праздник, 1997, 7.3*) Четырёхугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 имеет две параллельные стороны и разбит на четыре одинаковые фигуры (см. рисунок). В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему.



□

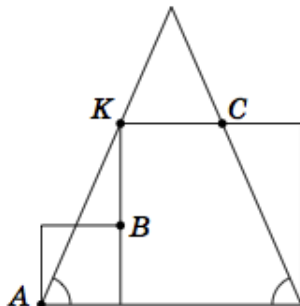
4. (*«Ломоносов», 2013, 7.3*) Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1 , точка B — серединой AA_1 , точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1 . Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом.

5. (*«Ломоносов», 2019, 7–8.3*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса BD и высота CH . Из вершины C на биссектрису BD опущен перпендикуляр CK . Найдите угол HCK , если $BK : KD = 3 : 1$.

□

6. (*Математический праздник, 1993, 7.4*) В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

7. (*Математический праздник, 2018, 7.4*) Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина K большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки A , B и C лежат на одной прямой.

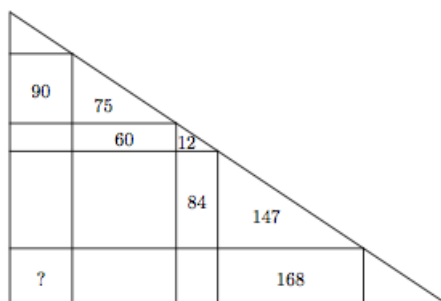


8. (Московская устная олимпиада, 2019, 7.5) Прямоугольный лист бумаги согнули по диагонали. Может ли периметр полученного пятиугольника оказаться равным периметру исходного листа?

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7) Дан угол с вершиной O_1 . Провели окружность с центром в точке O_1 , она пересекает стороны угла в точках A и B . Потом провели касательные к окружности в точках A и B , они пересеклись в точке O_2 . Построили вторую окружность, с центром O_2 и радиусом O_2A , и провели касательные в точках A и B . Эти касательные пересекаются в точке O_3 . Затем построили окружность с центром O_3 , и так далее. Так проделали 1001 раз. Найдите угол $AO_{1001}B$, если $\angle AO_1B = 60^\circ$.

09

10. («Ломоносов», 2012, 7) Прямоугольный треугольник разбили на несколько фигур так, как показано на рисунке. Зная указанные площади фигур, найдите площадь прямоугольника в левом нижнем углу.



22

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7) Леночка собралась испечь пирог на день рождения. Она раскатала тесто равномерным слоем в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Потом она подумала, что теста хватит на два пирога, и провела из точки на гипотенузе два прямолинейных разреза, параллельных катетам треугольника. Получилось два треугольника и один прямоугольник.

Из прямоугольника Леночка испекла пирог с клубникой, а треугольники слепила вместе, раскатала и испекла пирог с капустой. Может ли получиться так, что в пироге с клубникой теста больше, чем в пироге с капустой?

Нет

12. (Всеросс., 2014, МЭ, 8) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

75

13. («Ломоносов», 2014, 10–11) Треугольник LOM с углом $\angle LOM = 51^\circ$ повернули на некоторый острый угол вокруг точки O . При этом точка L переходит в точку N , лежащую на стороне LM , а точка M — в такую точку K , что $OM \perp NK$. Найдите угол поворота.

34

14. (ОММО, 2014) В треугольнике ABC длина стороны AB равна 2, угол A равен 60° , угол B равен 70° . На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите угол DBC .

40

15. («Высшая проба», 2014, 7) На стороне BC неравнобедренного треугольника ABC выбрали точку D . Оказалось, что каждый из треугольников ABD и ACD — равнобедренный, а один из них ещё и прямоугольный. Найдите величину наименьшего из углов треугольника ABC .

22,5

16. («Высшая проба», 2014, 7) В прямоугольном треугольнике произведение высот в два раза меньше произведения сторон. Найдите наименьший угол этого треугольника.

45

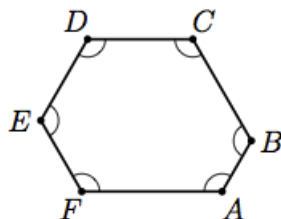
17. («Высшая проба», 2018, 7.2) На плоскости есть набор из 2018 точек, никакие 3 не лежат на одной прямой. Рассмотрим все замкнутые ломаные, проходящие через все точки набора. Сколько точек самопересечения может иметь ломаная минимальной длины?

18. («Курчатов», 2019, 7.4) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle AYB = \angle AXC = 134^\circ$. На луче YB за точку B отметили точку M , а на луче XC за точку C отметили точку N . Оказалось, что $MB = AC$, $AB = CN$. Найдите $\angle MAN$.

46

19. («Высшая проба», 2020, 7.4) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB = BC = CD$, и каждая из диагоналей равна какой-то стороне. Найдите углы четырёхугольника. (Ответ нужно выразить в градусах)

20. («Курчатов», 2017, 7.5) Все углы шестиугольника $ABCDEF$ равны.



Докажите, что $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

21. («Высшая проба», 2018, 7–8.4) Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC . Пусть на стороне AC взята точка B , так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC , т.е. $BD = CD$. Пусть углы BDC , ABE , ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD .

50

22. («Высшая проба», 2019, 7.4) В треугольнике ABC , в котором все три стороны попарно различны, проведены биссектрисы углов A и B , делящие его на четырехугольник и три треугольника, два из которых равнобедренные. Найдите углы исходного треугольника.

$\frac{7}{11}, \frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$

23. (Московская устная олимпиада, 2018, 7.8) Точка M — середина стороны BC треугольника ABC . Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.

24. (Московская устная олимпиада, 2019, 7.8) Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что сумма углов ABC и APC равна 180° и $CP = AB$. Докажите, что $\angle CAP < 60^\circ$.