

Геометрия на ММО. 10 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 10 классе.

Принцип нумерации задач: номер **17.3** означает, что задача предлагалась в 2017 году под номером 3 (чем больше номер задачи, тем она обычно сложнее).

19.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB' . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO .

16.2. Внутри выпуклого четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ нашлась такая точка C , что треугольники CA_1A_2 и CB_1B_2 — правильные. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых A_2B_2 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

10.2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, причём отрезок MN параллелен основаниям трапеции. Диагональ AC пересекает этот отрезок в точке O . Найдите MN , если известно, что площади треугольников AMO и CNO равны.

20.3. Существует ли вписанный в окружность 19-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов?

18.3. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC , AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO . Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB .

17.3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Описанная окружность треугольника AOC вторично пересекает стороны AB и BC в точках E и F . Оказалось, что прямая EF делит площадь треугольника ABC пополам. Найдите угол B .

14.3. Дан треугольник ABC . Обозначим через M середину стороны AC , а через P — середину отрезка CM . Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q . Докажите, что $\angle ABM = \angle MQR$.

13.3. Дан правильный $4n$ -угольник $A_1A_2 \dots A_{4n}$ площади S , причём $n > 1$. Найдите площадь четырёхугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

12.3. Из плоскости вырезали равносторонний треугольник. Можно ли оставшуюся часть плоскости замостить треугольниками, любые два из которых подобны, но не гомотетичны?

11.3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1 . Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC . Найдите угол C треугольника.

09.3. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

20.4. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и AC в точках X и Y . Прямая AO пересекает прямую BC в точке D , M — середина BC . Описанная окружность треугольника ADM пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E , отличной от A . Докажите, что прямая OE касается описанной окружности треугольника AXY .

18.5. Карлсон ест треугольный торт. Он режет торт по биссектрисе одного из углов, съедает одну из частей, а с другой повторяет ту же операцию. Если Карлсон съест больше половины торта, он станет не в меру упитанным мужчиной в самом расцвете сил. Докажите, что рано или поздно это произойдёт.

16.5. В куб с ребром 1 поместили 8 непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4?

15.5. Дан треугольник ABC . Проведены высота AH и медиана CM . Обозначим точку их пересечения через P . Высота, проведённая из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM , в точке Q . Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.

12.5. Дан остроугольный треугольник ABC . Для произвольной прямой l обозначим через ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c прямые, симметричные l относительно сторон треугольника, а через I_ℓ — центр вписанной окружности треугольника, образованного этими прямыми. Найдите геометрическое место точек I_ℓ .

09.5. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих внеписанных окружностей в точках A_1, B_1 . Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и $CB B_1$. Докажите, что прямая $A_2 B_2$ перпендикулярна биссектрисе угла C .

13.6. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC . Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точки A , а через A_2 — середину дуги BAC . Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую $A_2 I$, пересекает прямую BC в точке A' . Аналогично определяются точки B' и C' .

а) Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI , где O — центр описанной окружности треугольника ABC .